Über den Kraftlinienverlauf im Luftraum und in den Zähnen von Dynamoankern.

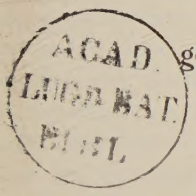
Von der Technischen Hochschule in München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

(Doktor-Ingenieurs)

genehmigte Dissertation.



Von

Dipl.-Ing. Karl Hoerner

aus Triest.

Referent: Prof. Joh. Ossanna.

Korreferent: Prof. Dr. Kurt Heinke.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin

Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke)
in Berlin und Fürstenwalde (Spree).

Durch die übliche Nutung der Dynamoanker wird die Größe des Luftzwischenraumes zwischen dem Eisen des Pols und dem des Ankers absatzweise geändert und eine entsprechende Veränderung in der Verteilung der magnetischen Kraftlinien im Luftraum und in den Zähnen verursacht. Die Kraftlinien verlaufen nicht wie bei glatten Ankern radial, sondern treten außer aus dem Kopf auch aus den Flanken der Zähne aus und verteilen sich in Röhren größter Leitfähigkeit, so daß ihre Dichte im allgemeinen an jeder Stelle längs der Ankerumfanges wie längs des Luftspalts eine andere ist. Zur genauen Berechnung der für den Luftspalt und für die Zähne aufzuwendenden Erregeramperewindungen und der in den Zähnen auftretenden Verluste sind daher durch Formeln oder Kurven gegebene Beziehungen zwischen der mittleren Luftinduktion einer Nutteilung, die aus der Bestimmung der Hauptgrößen der Maschine folgt, und dem in der Zahnmittellinie auftretenden Höchstwert der Luftinduktion sowie der Zahninduktion längs des Zahnes erforderlich.

Für das erstere Verhältnis, den sogenannten Luftspaltkoeffizienten, sind in der Literatur zahlreiche Formeln angegeben; einige sind auf rein analytischem Wege, mit mehr oder weniger vereinfachenden Annahmen über den Verlauf der Kraftlinien, erhalten, wie diejenigen von Kutta [1]), Carter [2]), Legros[3]), in anderen sind empirische, durch Aufzeichnung von Kraftlinienbildern und Auswahl desjenigen größter Leitfähigkeit erhaltene Größen verwendet, wie in denen von Arnold [4]) und Ossanna [5]). Aus sämtlichen Formeln geht hervor, daß der Koeffizient von

[1]) Angegeben in Rziha und Seidener, Starkstromtechnik.
[2]) Carter, El. World and Eng. V. 38.
[3]) Legros, L'Éclairage Él. V. 50 und 51.
[4]) Arnold, Die Gleichstrommaschine I.
[5]) Angegeben in Pichelmayer, Dynamobau, Handbuch der Elektrotechnik von Heinke.

dem Verhältnis der Nutbreite zur Nutteilung und dem der Nutbreite zum Luftspalt abhängt.

Im Gegensatz zu diesem viel bearbeiteten Gebiet fehlen noch die Grundlagen zu einer auch nur angenähert richtigen Bestimmung der Zahninduktion, deren Erzeugung bei hoher Sättigung einen beträchtlichen Teil der gesamten Erregung beansprucht. Die üblichen Berechnungen gründen sich immer noch, im Widerspruch zu der für den Luftspalt angenommenen Kraftlinienverteilung, auf die Annahme, daß der Fluß in den Zähnen wie in den Nuten konstant und durch die gleiche magnetomotorische Kraft hervorgerufen sei. Zur Erleichterung der Berechnung werden meist Kurven gegeben, aus welchen die Zahninduktion für einen bestimmten Nutteilungsfluß entnommen werden kann; sie gelten naturgemäß nur für Eisen mit einer Magnetisierungskurve gleich der bei der Berechnung der Kurven angenommenen.

Außer vereinzelten, nicht allgemein gültigen Angaben über den Fluß oder die Induktion in Zahn oder Nut finden sich nur zwei Arbeiten, in denen Messungen über den Kraftlinienverlauf in den Zähnen vorkommen. Hele-Shaw, Hay und Powell [1]) verwenden strömende Flüssigkeit, deren Gesetze mit denen des magnetischen Flusses angenähert übereinstimmen, zur Darstellung von Kraftlinienbildern in Luftraum und Zähnen und messen an mehreren Dynamoankern den Fluß über einer Nutteilung, in Zahnkopf, -mitte und -fuß. Wall [2]) mißt in einer Arbeit „Der magnetische Widerstand des Luftspaltes von Dynamomaschinen“ die längs des Zahnkopfes, der Zahnflanken und des Nutgrundes auftretende Induktion. In beiden Arbeiten sind keine Berechnungen über den Zahnfluß angestellt.

A. Theoretische Betrachtungen.

Bei der Berechnung der Zahninduktion und der Zahnamperewindungen auf Grund konstanten Zahnflusses geht man allgemein von der Zahnfußinduktion aus, unterteilt den Zahn der Höhe nach in eine Anzahl von Schichten, deren für die mittlere Schichtbreite bestimmte Induktion man als konstant betrachtet,

[1]) Hele-Shaw, Hay und Powell, Journ. Inst. El. Eng. V. 34.
[2]) Wall, Journ. Inst. El. Eng. V. 40.

und berechnet mit Hilfe der Magnetisierungskurve die für den ganzen Zahn erforderliche Erregung. Zur Vereinfachung wird manchmal geradliniger Verlauf der Induktion zwischen den Endwerten im Zahnfuß und Zahnkopf angenommen, an Stelle des aus der Voraussetzung konstanten Zahnflusses folgenden hyperbolischen Verlaufes. Wie eine Nachrechnung zeigt, wird durch diese Annäherung die Erregung bei stark gesättigten Zähnen erheblich zu hoch bestimmt.

Dem Übelstand, daß man bei der Berechnung an den Gebrauch der Magnetisierungskurve gebunden ist, suchte man seit langer Zeit durch Aufstellung einer Magnetisierungsgleichung abzuhelfen, ohne daß es bisher gelungen ist, eine einfache Beziehung, welche sich den verschiedenen Eisensorten leicht anpassen läßt, zu finden. Das in jüngster Zeit von Weißhaar [1]) angegebene Gesetz $B = a \cdot H^k$, das bei Logarithmierung eine Gerade ergibt, fand ich bei mehreren Magnetisierungskurven für Induktionen über 20 000 nicht bestätigt. Es wurde auch von mir der Versuch gemacht, verschiedene Magnetisierungskurven durch Gleichungen zu bestimmen und mit diesen die Zahnamperewindungen zu berechnen, jedoch teilen die gefundenen Gleichungen den Nachteil der bisher bekannten, daß sie ungünstige Konstanten und Form besitzen und nicht leicht genug verallgemeinert werden können, um einen vollständigen Ersatz für die Benutzung der Kurven zu bieten.

Daß die Berechnung der Zahninduktion noch immer auf der erwähnten unrichtigen Annahme beruht, liegt in der großen Zahl von Faktoren begründet, die die Kraftlinienverteilung im Luftraum und in den Zähnen bedingen. Zunächst tritt ebenso wie bei glatten Ankern auch bei Nutenankern eine Verbreiterung der Kraftröhren durch die Vergrößerung des Umfanges vom Anker bis zum Pol auf; sie ist jedoch bei dem üblichen kleinen Luftspalt nicht merklich und soll in folgendem vernachlässigt werden. Es werden also ebene Begrenzungsflächen des Luftspaltes angenommen.

Der Hauptteil des Kraftflusses verläuft bei Nutenankern zwischen Zahnkopf und Pol. Die Kraftlinien treten, wie aus dem umstehenden, von Kutta [2]) berechneten Kraftlinienbild (Abb. 1)

[1]) Weisshaar, E. T. Z. 1910, S. 400.
[2]) Nachgezeichnet nach Pichelmayer, a. a. O.

und den von Wall [1]) veröffentlichten Kurven ersichtlich ist, in annähernd konstanter Dichte aus dem Zahnkopf, mit Ausnahme einer den Kanten benachbarten kurzen Strecke, auf welcher durch die „Spitzenwirkung“ eine Verdichtung stattfindet. Nach dem Pol zu verbreitert sich nun jede Kraftröhre, so daß eine Abnahme der Induktion längs des Luftspaltes eintritt. Am stärksten dehnen sich die an der Zahnkante austretenden Röhren aus. Daher nimmt schon in geringem Abstand von dem Zahnkopf die Induktion von der Zahnmittellinie nach beiden Seiten hin stetig ab. Es ist klar, daß der Zahnkopffluß sich desto mehr ausdehnt, je größer der Luftspalt und die Nutbreite ist.

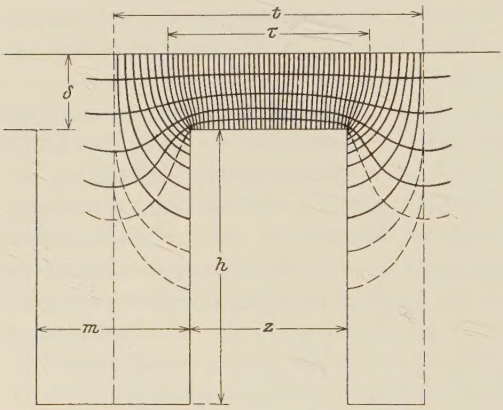


Abb. 1.

Zu diesem Fluß kommt nun ein zweiter, der von den Zahnflanken durch die Nut nach dem Pol verläuft. Seine Stärke wächst bei gegebener Zahnkopfinduktion ebenfalls mit dem Luftspalt und der Nutbreite. Er erstreckt sich, in anfangs rasch, dann langsamer abnehmender Dichte, auch bei kleiner Nutbreite bis an den Zahnfuß, seine Veränderung durch verschiedene Zahnhöhen kann bei der geringen in der Praxis üblichen Verschiedenheit derselben vernachlässigt werden.

Ein dritter Fluß verläuft vollständig in Luft vom Nutgrund zum Pol, er soll in folgendem kurz mit Nutfluß bezeichnet werden. Da man den Pol und die durch Zahnfuß und Nutgrund bestimmten Flächen als Äquipotentiale betrachten kann, wird er durch die für Luftspalt und Zahn erforderlichen Amperewindungen hervorgerufen, infolge seiner geringen Stärke ist er

[1]) Wall, a. a. O.

jedoch in seiner Ausdehnung sehr durch die beiden vorgenannten Flüsse bedingt. Seine Breite würde nach den bisherigen Erörterungen am Nutgrund gleich der Nutbreite sein und erst langsam, sodann, in der Nähe der Zahnspitze, rasch so weit abnehmen, daß an der Polfläche die Dichte dieser Nutflußröhren gleich oder kleiner als die der äußersten Röhren des Zahnflankenflusses ist. Er wird ebenfalls mit dem Luftspalt und der Nutbreite steigen und mit wachsender Nuthöhe fallen.

Schwierigkeiten bereitet die Berücksichtigung der Veränderungen, welche diese Flüsse dadurch erfahren, daß die Leitfähigkeit des Zahnes von der Zahninduktion abhängt. Auch bei gleichbleibender Zahnbreite nimmt sie nach dem Zahnkopf hin entsprechend dem Austreten der Kraftlinien durch die Zahnflanken ab, in stärkerem Maße, wenn die Zahnbreite mit dem Radius wächst. Außerdem wird die Kraftlinienverteilung für jede Erregung eine andere sein, eine Verstärkung derselben muß zur Folge haben, daß der Zahnflankenfluß und der Nutfluß gegenüber dem Zahnkopffluß etwas wachsen. Bei den üblichen Zahnbreiten und -höhen dürften Änderungen der letzteren und der Induktion nicht von erheblichem Einfluß sein, beide Größen sind auch in keiner Formel des Luftspaltkoeffizienten berücksichtigt.

Eine weitere Schwierigkeit in der Bestimmung des Kraftlinienverlaufes erkennt man bei Betrachtung desselben in der Nähe des Zahnfußes. Wird die Erregung auf Werte hoher Sättigung gesteigert, oder nimmt die Zahnbreite nach dem Fuß stark ab, so wird infolge der geringeren Leitfähigkeit am Fuße eine bedeutend größere Zahl von Kraftlinien aus dem Nutgrund austreten und teils ganz durch die Nut verlaufen, teils durch den unteren Teil derselben in die Zahnflanken eintreten. Während demnach bei geringer Sättigung der Fluß vom Zahnfuß nach dem Kopf abnimmt, wird mit steigender Erregung die Abnahme in der Nähe des Zahnfußes immer geringer, und es wird schließlich zunächst eine Zunahme und erst in größerer Entfernung vom Zahnfuß die Abnahme eintreten.

Damit sind diejenigen Faktoren erschöpft, die, bei der üblichen rechteckigen Nutform und bei unbelastetem Anker, solche Veränderungen des Kraftlinienverlaufes herbeiführen, die in einem Zahnschnitt senkrecht zur Achse in Erscheinung treten.

Weitere, erhebliche Änderungen, auf die in der Literatur anscheinend noch nirgends eingegangen wurde, erfährt der Zahnfluß durch die Kraftlinien, die in durch die Achse gelegten Ebenen in anderen Bahnen als den bisher erwähnten zwischen Anker und Pol verlaufen. Hat das Ankerpaket gleiche Länge wie der Pol, so wird der Zahnfluß nach dem Kopf hin vermindert um Kraftlinien, die, auf beiden Stirnseiten aus dem Zahn austretend, nach den Stirnseiten des Pols sich schließen. Dieser in folgendem mit Seitenfluß bezeichnete Fluß wird mit dem Luftspalt und der Zahnhöhe und bei steigender Sättigung in stärkerem Maße als diese wachsen sowie von der axialen Zusammensetzung des Zahnes abhängen. Da ferner die Röhren dieses Flusses sich in der Ebene senkrecht zur Achse von Zahnbreite bis zur Breite der Nutteilung ausdehnen, wird er auch mit der Zahn- und Nutbreite steigen. Bei Ankern mit Luftschlitzen entsteht noch ein Fluß von den inneren Stirnseiten der Pakete nach der Polmantelfläche und verursacht also eine Abnahme des Zahnkopfflusses. Ist die Pollänge kleiner als die Ankerlänge, so wird der vorerwähnte Seitenfluß verringert, während sich ein weiterer Fluß zwischen Teilen derjenigen Zahnkopffläche, die nicht mehr unter dem Pol liegt, und den Stirnseiten des Pols ausbildet. Die Wirkungen der Luftschlitze und der überstehenden Ankerlänge auf den Zahnfluß sind also einander entgegengesetzt, so daß sich die axiale Kraftlinienverteilung bei solchen Ankern nicht erheblich von derjenigen unterscheiden wird, die bei einem Anker von Pollänge ohne Luftschlitze auftritt.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß im allgemeinen der Abfall des Zahnflusses vom Fuß nach dem Kopf, bezogen auf den Kopffluß, mit dem Luftspalt, der Nutbreite und der Zahnhöhe und gegen die Zahnbreite sowie die Zahnlänge wächst, und daß bei Erhöhung der Sättigung zunächst eine Verstärkung des Abfalles entsteht, weiter aber bei sehr hohen Werten derselben der Zahnfluß nicht mehr am Fuße, sondern an einer Stelle zwischen diesem und der Mitte am größten ist.

Da es nicht tunlich ist, diese Faktoren in einfacher, für die Praxis dienlicher Weise auf analytischem Wege zu berücksichtigen, soll der Einfluß derselben durch Messungen festgestellt und durch Aufstellung empirischer Formeln ausgedrückt werden,

und zwar soll sich die Untersuchung auf den Verlauf der Kraftlinien im Luftspalt, im Zahn und in der Nut erstrecken.

B. Versuchseinrichtung.

Die Verwendung von Dynamoankern zur Lösung der gestellten Aufgabe ist durch die Schwierigkeit, bei sonst gleichen Versuchsbedingungen einen der erwähnten Faktoren mehrfach zu verändern, ausgeschlossen, daher wurde ein besonderer Versuchsapparat gebaut, der eine möglichst vielseitige und sichere Änderung der Bedingungen ermöglichte.

Die Hauptabmessungen desselben waren durch einen zur Verfügung stehenden Elektromagneten von Hufeisenform begrenzt. Zwischen seine Schenkelenden wurden die Eisenstücke eingebaut, die als Pol beziehungsweise Anker verwendet wurden; sie waren von parallelepipedischer Form, so daß ein Luftspalt von jeweils konstanter Größe mit ebenen Flächen zwischen ihnen freiblieb (Abb. 2). Als Pol diente ein Eisenklotz von 100 mm Länge, 80 mm Höhe und 80 bzw. 120 mm Breite, zwischen ihn und den Elektromagneten wurden zur Veränderung des Luftspaltes Eisenplatten verschiedener Stärke eingefügt, und zwar betrug der Luftspalt 1,8, 4,3, 6,8 und 11,8 mm. Der als Anker zu bezeichnende Teil wurde, um seine Abmessungen leicht ändern zu können, aus einzelnen Stücken zusammengesetzt, indem zwischen je 2 Eisenplatten, die als Zähne dienten, Stücke geringerer Höhe

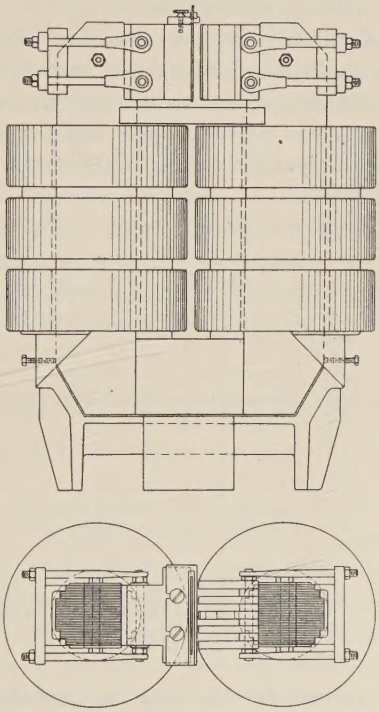


Abb. 2.

eingesetzt und dadurch Nuten gebildet wurden. Es wurden 5 bzw. 3 Zahnstücke mit den Abmessungen: Länge 100 mm, ganze Höhe 80 mm, Breite 10 mm, ferner solche mit 5,8 mm Breite und solche von 10 mm Kopfbreite und 4,3 mm Fußbreite verwendet. Die Zwischenstücke waren so gewählt, daß Nuten von 5, 10, 15, 20, sowie zu besonderem Zweck von 1,8 mm Breite, und von 50 und 32 mm Höhe hergestellt wurden. Sämtliche Stücke waren sorgfältig bearbeitet und wurden durch Schraubenbolzen gegeneinander und an den Elektromagneten gepreßt.

Da die Herstellung dieser Stücke aus Blechen nicht gut möglich war, wurde massives, schwedisches Eisen verwendet, eine Maßnahme, die in zweifacher Weise die Resultate der Untersuchung beeinflussen kann. Der vorstehend besprochene Seitenfluß wird sich bei massiven Zähnen stärker ausbilden als bei lamellierten, da er bei letzteren vor seinem Austritt aus den Stirnseiten die Schichten geringer Permeabilität zwischen den Blechen durchdringen muß. Gegenüber dem großen Luftweg kann jedoch dieser Widerstand, der sich dem Seitenfluß nur in den äußeren Schichten der Zähne bietet, nicht von merklicher Bedeutung sein. Auf den zweiten Einfluß wird weiter unten eingegangen werden.

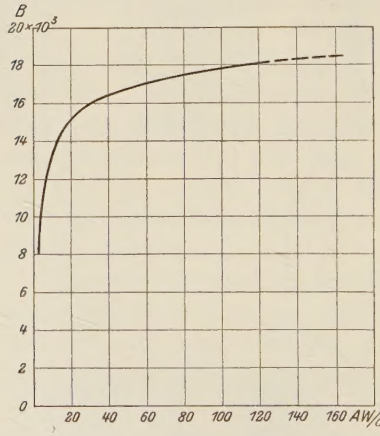


Abb. 3.

Zur Bestimmung der Magnetisierungskurve des verwendeten Eisens wurde aus dem gleichen Block ein Stab herausgeschnitten und im Koepsel-Apparat untersucht, daher erstreckt sich die Kurve nur bis zu einer Induktion von zirka 18 000 C.G.S. Sie ist in Abb. 3 aus den Mittelwerten der Messung dargestellt und liegt in dem von den gebräuchlichen Eisensorten eingenommenen Gebiet.

Der zur Erzeugung des Kraftlinienflusses gebrauchte Elektromagnet hatte 2400 Windungen mit einer Belastungsfähigkeit von etwa 10 Ampere. Zur Messung dienten Prüfspulen und ein

ballistisches Galvanometer mit einer Schwingungsperiode von 16 Sekunden, die Ablesung geschah durch Fernrohr und Skala.

Um zur Messung des Zahnflusses Prüfspulen verwenden zu können, die um den Zahn gewickelt waren, wurde der magnetische Fluß, und zwar durch Kommutierung, verändert. Hierdurch traten allerdings in den massiven Versuchsstücken Wirbelströme auf, jedoch wurde festgestellt, daß die durch Kommutierung erzielten Ausschläge den durch Herausziehen der Prüfspule aus dem Feld gewonnenen entsprachen. Durch Einschaltung von Vorschaltwiderstand in den Erregerkreis wurde dafür gesorgt, daß die Galvanometerausschläge durch das allmähliche Anwachsen des Erregerstromes, das durch die Selbstinduktion der Magnetwicklung herbeigeführt wird, nicht merklich beeinflußt wurden. Im ungünstigsten Fall war das Verhältnis des Ohmschen Widerstandes zum Selbstinduktionskoeffizienten noch so groß, daß innerhalb von einem Zehntel Sekunde etwa 70 Proz. des konstanten Erregerstromes erreicht waren.

Zur Messung der Induktion im Luftspalt und in der Nut diente eine bewegliche schmale Spule; aus den Einzelwerten der Induktion wurde dann der Fluß einer Nutteilung durch Aufzeichnung und Planimetrierung bestimmt, da dieses Verfahren gegenüber dem der direkten Messung den Vorteil größerer Sicherheit und Übersicht bietet. Die Spule (Abb. 4) bestand aus

Abb. 4.

2 Windungen, die in ein Hartgummibrett eingelassen waren, ihre Höhe betrug 100 mm, ihre Fläche wurde durch genaue Ausmessung zu 1,88 qcm bestimmt und die Spule außerdem mit einer Wismutspirale verglichen. In einer mit einer Teilung versehenen Kulisse, die an dem Pol befestigt war, konnte die Prüfspule in dem Luftspalt verschoben werden. Die zur Messung des Zahnflusses verwendeten Spulen von je zwei Windungen wurden auf dem mittleren Zahn angebracht und passend auf die Zahnhöhe verteilt, und zwar befanden sie sich im Abstand von 1, 5, 11, 26 und 50 mm von dem Zahnkopf. Bei der Messung mit abnehmender Zahnbreite wurde noch eine weitere Spule

im Abstand von 40 mm angebracht. Die erste Spule wurde möglichst nahe am Zahnkopf aufgewickelt, die letzte in einigem Abstand vom Fuß, um die in der Nutkante auftretenden Störungen zu vermeiden. Durch Einbettung in Paraffin wurden die Spulen in ihrer Lage festgehalten, sämtliche Leitungen des Galvanometerkreises, in dem ein Quecksilberumschalter eingebaut war, wurden sorgfältig isoliert und verdrillt.

C. Durchführung der Versuche.

Das Galvanometer, in dessen Stromkreis je nach Bedarf verschiedener Widerstand eingeschaltet war, wurde wiederholt mittels langer Spule geeicht. Durch mehrfaches Auseinandernehmen und Zusammenbauen der Ankerstücke sowie durch Wiederholung einzelner Messungen wurde festgestellt, daß Fehler durch etwaige mangelhafte Berührung zwischen den Stücken sowie durch sonstige Unregelmäßigkeiten nicht entstanden. Längs der Zahnlänge war das Feld konstant. Mit der beweglichen Prüfspule wurde geprüft, ob die Luftinduktion vor den äußeren Zähnen derjenigen vor dem mittleren, zur Messung verwendeten, bis auf geringe Unterschiede gleichkam.

Da es nicht möglich war, den Erregerkreis gut gegen Erde zu isolieren, mußten die Prüfspulen durch eine ausgezeichnete Isolation von dem Zahn getrennt werden, wozu Mikanitleinwand verwendet wurde. Obwohl hierdurch der Spulenquerschnitt merklich größer als der Eisenquerschnitt wurde, kann der ohne Korrektion aus der Messung berechnete Fluß doch als reiner Zahnfluß betrachtet werden, da die Kraftlinien in der nächsten Umgebung des Zahnes im allgemeinen infolge der Änderung des Zahnflusses und der Brechung der Kraftlinien senkrecht zu den Zahnseiten stehen. Nur an den Stellen konstanten Zahnflusses wäre der zwischen Zahn und Spule verlaufende Fluß von dem gemessenen abzuziehen, jedoch ist bei den verwendeten Abmessungen und Sättigungen der Fehler zu vernachlässigen.

Bei größeren Nutweiten war die Verwendung von 5 Zähnen nicht mehr möglich, es konnte, wie Versuche zeigten, dann ohne beträchtliche Veränderung des Kraftlinienverlaufes die Zahnzahl auf 3 beschränkt werden. Ebenso konnte die Polbreite auf 2 je nach der Breite des Ankerstückes gewählte Werte, und zwar

80 und 100 mm, beschränkt werden; falls es sich erforderlich zeigte, wurde mit beiden Polbreiten gemessen und der Mittelwert zur Berechnung verwendet.

Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen sind:

z = Zahnbreite,
h = Zahnhöhe, vom Kopf aus gemessen,
x = Abstand einer Stelle des Zahnes vom Kopf,
m = Nutbreite,
δ = Luftspalt,
t = Nutteilung,
τ = Breite des Zahnkopfflusses am Pol,
q = Prüfspulen- bzw. Eisenquerschnitt,
n = Windungszahl der Prüfspule,
w = Widerstand des Galvanometerkreises,
C = Konstante des Galvanometers,
α = Summe der Galvanometerausschläge links und rechts bei zweimaliger Kommutierung,
B_l = Luftinduktion am Pol,
B_l = höchste Luftinduktion am Pol,
B_{lm} = mittlere Luftinduktion am Pol,
B_n = Induktion in der Nutmitte,
B_{ng} = Induktion in der Mitte des Nutgrundes,
B_{zf} = Zahnfußinduktion,
N_t = Fluß einer Nutteilung,
N_z = tatsächlicher Zahnfluß,
N_{zk} = Zahnkopffluß,
N_{zf} = Zahnfußfluß,
N_{z1} bis N_{z6} = Zahnfluß an den Meßstellen 1 bis 6,
N_{zm} = Mittelwert des Zahnflusses,
N_n = Nutfluß zwischen Nutgrund und Pol,
N_σ = Fluß zwischen den Stirnseiten von Zahn und Pol, Seitenfluß genannt, mit den Indices 1 bis 6, f.
B'_{zf} = fiktive Zahnfußinduktion (vgl. S. 24 u. 25).
$N_s = N_\sigma - N_n$
$N_i = N_z - N_s$ = idealer Zahnfluß } mit den Indices 1 bis 6, f.

$$C_l = \frac{\overline{B_l}}{B_{lm}},$$

$$C_k = \frac{N_{zk}}{N_t},$$

$$C_z = \frac{N_z}{N_{zk}},$$

$$C_{zf} = \frac{N_{zf}}{N_{zk}},$$

$$C_{z1} = \frac{N_{z1}}{N_{zk}}, \text{ entspr. } C_{z2} \text{ bis } C_{z6},$$

$C_s = \frac{N_s}{N_{zk}}$ für Fußinduktionen bis zu 18500 (vgl. S. 20) mit den Indices 1 bis 6, f,

$C_i = C_z - C_s$ mit den Indices 1 bis 6, f.

C'_s für Fußinduktionen über 18500 korrigierter Koeffizient C_s. (vgl. Gl. 5, S. 25).

$$c_k = \frac{\tau - z}{m}.$$

Aus den mit den Prüfspulen erhaltenen Galvanometerausschlägen berechnet sich

$$\text{die Luftinduktion } B_l = \frac{w\,C\,\alpha}{4\,q\,n},$$

$$\text{der Zahnfluß } N_z = \frac{w\,C\,\alpha}{4\,n}.$$

Die in Zahlentafel I und den Kurven wiedergegebenen Meßergebnisse wurden unter nachstehenden Versuchsbedingungen gewonnen:

Die Pol- und Zahnlänge betrug stets 100 mm. (Versuche mit anderen Pollängen konnten nicht mehr angestellt werden.)

A. Zahnbreite z = 10 mm.

I. Zahnhöhe h = 55 mm.

a) Nutbreite m = 5 mm, 5 Zähne, Polbreite 80 mm, Luftspalt δ = 1,8, 4,3, 6,8, 11,8 mm.

b) m = 10 mm, 5 Zähne, Polbreite 120 mm, δ = 1,8, 6,8 mm.

c) m = 15 mm, 3 Zähne, Polbreite 80 mm, δ = 1,8, 6,8, 11,8 mm.

d) m = 20 mm, 3 Zähne, Polbreite 80 mm, δ = 1,8, 4,3, 6,8, 11,8 mm; ferner: 3 Zähne, Polbreite 120 mm, δ = 6,8, 11,8 mm.

Bei der Auswertung der vorstehenden Messungen erwies es sich als notwendig, eine Meßreihe mit möglichst kleiner Nutbreite zu machen, daher wurde noch genommen

e) m = 1,8 mm, 5 Zähne, Polbreite 80 mm, δ = 1,8, 4,3, 6,8 mm.

II. h = 32 mm.
m = 15 mm, 3 Zähne, Polbreite 80 mm, δ = 6,8 mm.

B. z = 5,8 mm, h = 55 mm.
m = 10 mm, 5 Zähne, Polbreite 80 mm, δ = 6,8 mm.

C. Zahnkopfbreite z_k = 10 mm, Zahnfußbreite z_f = 4,3 mm, h = 55 mm.

a) m = 12,5 mm, Polbreite 80 mm, δ = 6,8 mm.

b) m = 22,5 mm, Polbreite 120 mm, δ = 1,8, 6,8 mm.

Sämtliche Meßreihen wurden mit mehreren Sättigungen aufgenommen. Die Erregung jeweils auf gleiche mittlere Luftinduktion oder gleichen Nutteilungsfluß einzustellen, war bei dem gewählten Meßverfahren nicht tunlich, es erschien auch nicht vorteilhaft, gleiche Zahnkopfinduktion zugrunde zu legen, da die Bestimmung derselben bei dem starken Abfall in der Nähe des Kopfes nur durch graphische Extrapolation genau genug gemacht werden kann. Es wurde daher die Erregung jeweils so eingestellt, daß die Zahnfußinduktion, welche man ja bei der Berechnung der Zähne zu wählen pflegt, bei den verschiedenen Meßreihen angenähert die gleiche war.

Die durchschnittlichen Werte der Zahnfußinduktion waren B_{zf} = 23500, 22 000, 18 500 und 10 500 C.G.S., der erste Wert konnte jedoch nur bei einigen Messungen erreicht werden.

D. Versuchsergebnisse.

Zahlentafel I enthält die aus den Messungen im Luftspalt, am Nutgrund und an den Zähnen bestimmten Größen in 1000 C.G.S.-Einheiten, ferner sind die Meßwerte in folgenden Kurven aufgetragen: Luftspalt, Kurventafel I, Nr. 1—17; Zahn, K.T. II, Nr. 1—23; Nut, K.T. III, Nr. 1—6; von den zur Auswertung verwendeten Kurven sind beigelegt K.T. III, 7—11.

Die Induktion im Luftspalt wurde an den in den Kurven bezeichneten Stellen gemessen, durch Planimetrieren die mittlere Induktion und hierdurch der Fluß einer Nutteilung bestimmt.

Der Zahnfluß wurde an den vorstehend angeführten und in den Kurven bezeichneten Stellen 1—5 bzw. 6 gemessen, der Fluß im Kopf und Fuß durch Verlängerung der Kurven gefunden. Der Mittelwert des Zahnflusses wurde durch Planimetrieren bestimmt und auch in den Kurven angegeben.

Während der Einfluß der Abmessungen aus den folgenden, nach den Messungen berechneten Zahlentafeln leichter zu überblicken ist als aus Z.T. I, ist aus dieser die Wirkung der Sättigung deutlich zu ersehen.

Wie aus den theoretischen Betrachtungen hervorgeht, setzt sich der über die Pollänge gemessene Fluß einer Nutteilung zusammen aus dem Zahnfußfluß, vermindert um den bis zum Fuß sich erstreckenden Stirnseitenfluß, und dem Nutfluß, also

$$N_t = N_{zf} - N_{\sigma i} + N_n \text{ oder } N_{zf} = N_t + N_{\sigma i} - N_n.$$

Die erhebliche Steigerung von $N_{\sigma i}$ mit der Sättigung ist besonders aus Messung 16, 17, 18, diejenige von N_n aus der Steigerung von B_{ng} in Messung 7, 10, 11 zu erkennen. Trotzdem nur die Differenz dieser beiden Flüsse zur Geltung kommt, ist die Wirkung der Sättigung noch erheblich. Bei kleinem Luftspalt (Messung 10) ist N_{zf} bei niedriger Sättigung größer als N_t, mit steigender Sättigung wird der Unterschied kleiner, und bei der höchsten ist sogar N_{zf} kleiner als N_t.

Zum Teil wird diese Erscheinung auch dadurch herbeigeführt, daß bei hoher Sättigung das erwähnte Übertreten von Kraftlinien vom Nutgrund nach den Zahnflanken stattfindet. Daß dieses bei abnehmender Zahnstärke besonders stark auftritt und sich bis zu bedeutendem Abstand vom Fuß erstreckt, zeigen die Zahnkurven 21—23.

Der Mittelwert des Zahnflusses wurde in der Annahme bestimmt, daß er sich vielleicht zu einer Berechnung der Zahnamperewindungen eignen würde, die genauer als die bisher übliche, aber doch nur mit einem einzigen Wert des Zahnflusses anzustellen wäre, jedoch gelang es nicht, ihn in eine einfache Beziehung zu den übrigen Größen zu bringen, so daß von einer Mitteilung der gefundenen Formeln abgesehen wird. Auffallend ist, daß die wegen der Neigung der Kurven nicht sehr scharf bestimmbare Stelle, an welcher der Zahnfluß gleich dem Mittelwert ist, bei sämtlichen Werten der Messungen 1—18 und 20 nahezu die gleiche ist, nämlich bei der Zahnhöhe 55 mm im

Durchschnitt 17 mm, bei der Zahnhöhe 32 mm im Durchschnitt 12 mm vom Kopf entfernt ist.

Zahlentafel II enthält drei Koeffizienten, die sich auf den Luftspalt beziehen.

In der ersten Spalte ist der aus den Messungen bestimmte Luftspaltkoeffizient $C_l = \frac{\bar{B}_l}{B_{lm}}$ eingeschrieben, ein Einfluß der Sättigung ist dabei nicht zu erkennen.

Wie früher erwähnt wurde, nimmt die Luftinduktion auch in der Zahnmittellinie infolge der Ausbreitung der Kraftlinien nach dem Pol zu etwas ab, der genaue Luftspaltkoeffizient ist daher bestimmt durch das Verhältnis der mittleren Luftinduktion in der Zahnmittellinie zu derjenigen der Nutteilung. Da die Messung an der Polfläche vorgenommen wurde, muß der ermittelte Koeffizient etwas zu klein sein. Zum Vergleich mit dem gemessenen wurde der Koeffizient berechnet nach der Formel von Ossanna [1])

$$C_l = \frac{t + 8\,\delta}{z + 8\,\delta}.$$

Dieselbe zeichnet sich durch ihre Einfachheit aus, ihr Bau folgt aus den Grenzbedingungen. Bei unendlich kleinem Luftspalt ist der Fluß auf die Zahnbreite beschränkt und homogen, der Koeffizient muß also für

$$\delta = 0 \text{ zu } C_l = \frac{t}{z}$$

werden; bei unendlich großem Luftspalt ist die Induktion über die ganze Nutteilung konstant, der Koeffizient hat also die untere Grenze 1.

Der Vergleich zwischen dem Koeffizienten der Messung und der Formel zeigt, daß, wie oben angeführt, der gemessene Wert in der Regel etwas zu klein ist.

Bei den von mir für die verschiedenen Koeffizienten aufgestellten Formeln wurde angestrebt, sie ähnlich derjenigen von Ossanna möglichst einfach (durch Aufstellung der Grenzwerte und empirische Bestimmung der Zahlengrößen aus den Versuchswerten) zu gestalten.

---

[1]) Aus Pichelmayer, a. a. O.

I. Größe des Zahnkopfflusses.

Der an zweiter Stelle in Z.T. II eingesetzte Koeffizient C_k ist gleich $\frac{N_{zk}}{N_t}$, dient also zur Berechnung desjenigen Teiles der Kraftlinien einer Nutteilung, der in den Zahnkopf eintritt. Die Bestimmung von N_{zk} ist infolge des steilen Verlaufes der Zahnkurve etwas unsicher, die für verschiedene Sättigungen gefundenen Werte zeigen daher unregelmäßige, jedoch geringe Abweichungen, so daß der Mittelwert aus den Werten verschiedener Sättigung genommen wurde. Wie der Vergleich von Messung 8 und 19 zeigt, ist kein merklicher Einfluß der Zahnhöhe zu erkennen, ihre Vernachlässigung ist also bei den üblichen Größen derselben statthaft.

Wird der Nutgrundfluß vernachlässigt, so erhält man als Grenzwerte für den Zahnkopffluß

für $\delta = 0$: $N_{zk} = N_t$, also $C_k = 1$,

für $\delta = \infty$ ist das Feld im Luftspalt homogen, also

$$\frac{N_{zk}}{z} = \frac{N_t}{z + m}, \qquad C_k = \frac{z}{z + m}.$$

Der Einfluß von δ muß demnach in einem Faktor von m dargestellt werden, also wird

$$C_k = \frac{z}{z + m\,y}, \text{ wo } y = f(\delta) \text{ ist.}$$

Die Berechnung von

$$y = \frac{z}{m} \cdot \frac{1 - C_k}{C_k}$$

liefert für m = 10, 12,5, 15, 20, 22,5 gleiche Werte für ein bestimmtes δ; für m = 5 ist y etwas kleiner, jedoch ist hier die Berechnung infolge der geringen Differenz $1 - C_k$ ungenau. Im Mittel ergeben sich für y folgende Werte (K.T. III, 7):

δ = 1,8 4,3 6,8 11,8 mm,

y = 0,18 0,23 0,26 0,28 mm.

Die Gleichung $y = f(\delta)$ muß nach obigem den Bedingungen genügen:

für $\delta = 0$, $y = 0$, für $\delta = \infty$, $y = 1$.

Trägt man die Werte von y abhängig von den Werten $\frac{y}{\delta}$ auf, so erhält man angenähert eine Gerade und findet daraus die Gleichung

$y = \frac{\delta}{a + b \cdot \delta}$ mit den Konstanten $a = 4{,}5$, $b = 3{,}3$.

Es ist also

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad C_k = \frac{N_{zk}}{N_t} = \frac{z}{z + m \frac{\delta}{4{,}5 + 3{,}3\,\delta}}$$

In Zahlentafel II sind die nach dieser Gleichung berechneten Werte von C_k neben die Meßwerte gesetzt, sie zeigen für jede Nutbreite gute Übereinstimmung.

II. Ausbreitung des Zahnkopfflusses.

In der Kraftlinienverteilung im Luftspalt ist noch von größerem Interesse die Ausbreitung des Zahnkopfflusses, da durch sie die Breite des Zahnflanken- und des Nutflusses bedingt ist. Die Breite τ, welche der Zahnkopffluß am Pol einnimmt, wurde aus den Kurven der Luftspaltinduktion durch Planimetrierung bestimmt; auch hier wurden die Mittelwerte aus den Messungen mit verschiedener Induktion genommen und in Z.T. II angegeben.

Die Zunahme der Breite vom Zahnkopf zum Pol $\tau - z$ muß mit der Nutbreite m und dem Luftspalt δ wachsen und mit diesen beiden zu Null werden. Also $\tau - z = m \cdot c_k$, wo c_k eine Funktion von δ mit der angegebenen Grenzbedingung ist. Bei Berechnung des Koeffizienten c_k für verschiedene Nutbreiten zeigt sich, daß er auch noch von dieser abhängt. Auf einem dem vorhergehend erläuterten ähnlichen Wege wurde gefunden, daß eine angenäherte Darstellung möglich ist durch

$$c_k = \frac{\delta}{m\ (a + b\,\delta)},$$

wo a eine Konstante ist und b von der Nutbreite angenähert nach der Gleichung $b = d + \frac{c}{m}$ abhängt, so daß folgt

$$2) \quad . \quad . \quad . \quad c_k = \frac{\delta}{0{,}3 \cdot m + \delta\,(0{,}06\,m + 0{,}8)}.$$

Die Übereinstimmung der in Z.T. II eingetragenen berechneten Werte mit den gemessenen ist mit Ausnahme derer für die Nutbreite 5 mm befriedigend.

III. Verlauf des Zahnflusses.

Um den Verlauf des Zahnflusses zu übersehen, wurde der an den verschiedenen Stellen gemessene auf den Kopffluß bezogen, und die so bestimmten Zahnkoeffizienten C_z zur Auswertung benutzt. Für dieses Verfahren spricht der Umstand, daß die Werte des Flusses in der Nähe des Kopfes durch Veränderung der Zahnhöhe, der Induktion und durch abnehmende Zahnbreite weniger beeinflußt werden als diejenigen in der Nähe des Fußes, und daß der Kopffluß nach Gleichung 1 genau berechnet werden kann; es hat aber den Nachteil der schon erwähnten Unsicherheit in der Bestimmung des Kopfflusses aus den Messungen.

In Zahlentafel III sind die verschiedenen Zahnkoeffizienten $C_z = \frac{N_z}{N_{zk}}$ für sämtliche Messungen der Z.T. I unter Angabe der Zahnfußinduktion eingeschrieben. Man sieht, daß in der Regel die Zahnkoeffizienten für die mittlere der gewählten Fußinduktionen von etwa 18 500 C.G.S. am größten sind, also sowohl mit Erhöhung als mit Verringerung der Induktion abnehmen; der Grund für ersteres wurde schon erläutert, letzteres wird durch die Abnahme des Stirnseitenflusses verursacht sein.

Die Auswertung der Messungen soll zunächst für den Zahnfuß durchgeführt werden. Für den Fluß desselben gilt (vgl. Seite 14).

$$N_{zf} = N_t + N_{\sigma i} - N_n.$$

Nach dieser Gleichung ließe sich der Seitenfluß $N_{\sigma i}$ aus dem mit der beweglichen bzw. der Zahnspule gemessenen Fluß N_t bzw. N_{zf} und dem Nutfluß N_n berechnen. Letzterer kann jedoch, obwohl seine Dichte am Nutengrund ziemlich konstant ist, nicht ohne weiteres aus der mit der beweglichen Spule gemessenen Induktion in der Mitte des Nutgrundes B_{ng} bestimmt werden, da seine Breite, wie die Betrachtung der Zahnflußkurven erwarten läßt und aus späteren Messungen hervorgeht, einen je nach den Versuchsbedingungen verschieden großen Teil der Nutbreite einnimmt.

Statt dessen wurde, unter Voraussetzung vereinfachender Annahmen, zur Trennung der Flüsse ein Verfahren eingeschlagen, das von den Messungen mit der beweglichen Spule unabhängig ist und daher bei Übereinstimmung der Resultate eine Bestätigung der Messungen und Berechnungen liefert.

Die erste dieser Annahmen ist, daß bei einem Luftspalt $\delta = 0$ der Zahnfluß konstant, insbesondere

$$N_{zf} = N_{zk} \quad \text{oder} \quad \frac{N_{zf}}{N_{zk}} = C_{zf} = 1$$

sei, welch letzteres für Zähne konstanter Breite genau zutrifft.

Die zweite Annahme bezieht sich auf die in der Gleichung auf S. 18 vorkommende Differenz $N_{\sigma f} - N_n$, die in folgendem mit N_{sf} bezeichnet werden soll. Wie früher ausgeführt wurde, steigt mit der Nutbreite m sowohl der Seitenfluß N_σ wie der Nutfluß N_n, so daß der Einfluß jener auf die Differenz der beiden Flüsse N_s gering ist.

Es sei nun angenommen, daß N_{sf} unabhängig von der Nutbreite ist.

Für die Nutbreite $m = 0$ ist der Zahnflanken- und der Nutfluß gleich Null, daher ändert sich dann der Zahnfluß nur durch den Seitenfluß, d. h. es ist

$$\text{für } m = 0\text{: } N_{zf} - N_{zk} + N_{\sigma f}.$$

Wird also der Zahnflußverlauf für Nutbreite Null bestimmt, und hieraus der Seitenfluß $N_{\sigma f}$ berechnet, so ist nach obiger Annahme dieser Wert gleich dem des Flusses $N_{sf} = N_{\sigma f} - N_n$ für jede Nutbreite; die Differenz des tatsächlichen Zahnflusses und des Flusses N_{sf} bei beliebiger Nutbreite ist dann gleich der Summe aus Kopf-, Flanken- und Nutfluß; diese sei als „idealer" Zahnfluß bezeichnet.

Es gilt also für den Zahnfuß: $N_{zf} - N_{sf} = N_{if}$,
und allgemein $N_z - N_s = N_i$.

Zur Durchführung der Auswertung wurden noch die Messungen 16—18 mit der kleinsten Nutbreite, die sich mit Rücksicht auf die Zahnprüfspulen erreichen ließ (m = 1.8 mm) ausgeführt, der Einfluß der Induktion ist hier sehr groß, da der Nutfluß nahezu Null ist.

Die Trennung der Flüsse wurde mit Koeffizienten unter Beziehung auf den Zahnkopffluß, und zwar für die Fußinduktion 18 500, durchgeführt. Es wurden aus Z.T. III zunächst die für den Zahnfuß berechneten Koeffizienten C_{zf} entnommen und als Funktion der Nutbreite m für die verschiedenen Luftspaltgrößen aufgetragen (K.T. III, 8). Als mittlere Kurve wurde zwischen den zusammengehörigen Werten eine gerade Linie gezogen und

bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse verlängert. Durch diese Extrapolation ergeben sich also die Koeffizienten C_{zf} für Nutbreite $m = 0$.

In K.T. III, 9 sind weiter diese Koeffizienten C_{zf} als Funktion des Luftspaltes δ für die Nutbreiten $m = 0, 5, 10, 15$ und 20 mm aufgetragen.

Da oben angenommen wurde, daß der Zahnfluß für den Luftspalt $\delta = 0$ konstant, also $C_{zf} = 1$, sei, so müssen sich die durch die gemessenen Punkte gezogenen Kurven $C_{zf} = f(\delta)$ in dem Punkte $C_{zf} = 1$ der Ordinatenachse vereinigen.

Nun ist nach obigem

$$\text{Für } m = 0\text{: } N_{zf} = N_{zk} + N_{\sigma f} = N_{zk} + N_{sf},$$

also

$$\frac{N_{sf}}{N_{zk}} = \frac{N_{zf}}{N_{zk}} - \frac{N_{zk}}{N_{zk}}, \quad C_{sf} = C_{zf} - 1,$$

daher stellen die senkrechten Abstände der Kurven (K.T. III, 9) $C_{zf} = f(\delta)$ für $m = 0$ von der Abszisse $C_{zf} = 1$ die zu dem betreffenden Luftspalt gehörigen Koeffizienten C_{sf} dar.

Nach der zweiten der obigen Voraussetzungen, daß N_{sf} unabhängig von der Nutbreite sei, gilt der für $m = 0$ bestimmte Koeffizient C_{sf} auch für jede andere Nutbreite, so daß nach der Gleichung $N_{zf} - N_{sf} = N_{if}$ mit den Koeffizienten C_{sf} nun für jede Nutbreite die Koeffizienten für den idealen Zahnfußfluß $C_{if} = C_{zf} - C_{sf}$ sich berechnen lassen bzw. aus den Kurven 49 durch Subtraktion der Werte C_{sf} von den Werten C_{zf} zu entnehmen sind.

Für die bei den Versuchen verwendeten Nutbreiten und Luftspaltgrößen sind die Koeffizienten C_{if}, die also der Summe von Kopf-, Flanken- und Nutfluß, und die Koeffizienten C_{sf}, die der Differenz von Seiten- und Nutfluß entsprechen, in Z.T. IV eingetragen.

Durch einen Vergleich mit den Messungen des Nutteilungsflusses N_t mittels der beweglichen Spule kann geprüft werden, ob die der Auswertung vorausgestellten Annahmen zulässig und die Messungen richtig sind.

Aus der Gleichung (vgl. S. 18 u. 19)

$$N_{zf} = N_t + N_{sf}$$

folgt

$$\frac{N_t}{N_{zk}} = \frac{N_{zf}}{N_{zk}} - \frac{N_{sf}}{N_{zk}} = C_{zf} - C_{sf}.$$

Da

$$\frac{N_{zk}}{N_t} = C_{zk}, \quad C_{zf} - C_{sf} = C_{if}$$

war, so muß also

$$\frac{1}{C_{zk}} = C_{if}$$

sein.

Zu dem gleichen Ergebnis führt die Betrachtung des Kraftlinienverlaufes.

Werden demnach die reziproken Werte der in Z.T. II eingeschriebenen Koeffizienten C_{zk} berechnet, so müssen sich die Werte der Koeffizienten C_{if} der Z.T. IV ergeben. Tatsächlich zeigt diese Kontrollrechnung hinreichende Übereinstimmung, da nur bei den größeren Luftspaltwerten sich nennenswerte Abweichungen ergeben. Die Werte $\frac{1}{C_{zk}}$ sind hier durchgehends etwas kleiner als die Werte C_{if}. Z. B. berechnet sich für $\delta = 6{,}8$ mm und

m =	5	10	15	20 mm
$\frac{1}{C_{zk}}$ =	1,11	1,27	1,39	1,51
C_{if} =	1,14	1,28	1,44	1,56

Die Abweichung beträgt also durchschnittlich 3 Prozent.

Die Annahme, daß die Differenz $N_{sf} = N_{\sigma f} - N_n$ von der Nutbreite unabhängig ist, ist mithin zulässig, und der ideale Zahnfußfluß kann nach der für den Zahnkopffluß gefundenen Gleichung 1 angenähert berechnet werden, nämlich:

$$1') \quad . \quad . \quad C_{if} = \frac{1}{C_{zk}} = \frac{z + m \cdot y}{z} = 1 + \frac{m}{z} \cdot \frac{\delta}{4{,}5 + 3{,}3\,\delta}.$$

Wie aus der Ableitung der Gleichung folgt und der Vergleich mit der Messung 20 zeigt, läßt sich die Gleichung für jede Zahnbreite anwenden; aus der Bildung des Koeffizienten C_{if} folgt ferner, daß er von der Ankerlänge praktisch unabhängig ist.

Zur Bestimmung des Zahnflusses als Funktion der Zahnhöhe wurde das eben beschriebene Verfahren für die Meßstellen 4 (K.T. III, 10 u. 11), 3 und 2 wiederholt. Die Aufzeichnung der Koeffizienten für die Meßstelle 4, die mit C_{z4} bezeichnet werden, als Funktion der Nutbreite liefert ebenfalls Gerade, diejenige der Koeffizienten C_{z3} und C_{z2} dagegen Kurven mit etwas

abnehmender Steigung. In gleicher Weise wie für den Zahnfuß wurden für die angegebenen Stellen die Koeffizienten C_s und C_i aus den Kurven bestimmt und in Z.T. IV eingetragen.

Die Koeffizienten für den idealen Zahnfluß lassen sich alle angenähert durch das für den Zahnfuß bestätigte Gesetz darstellen

$$C_i = 1 + \frac{m}{z} \cdot y,$$

wobei y von dem Luftspalt und der relativen Lage der Stelle auf dem Zahn abhängt. In Annäherung läßt sich setzen

$$y = \frac{\delta}{a + b \cdot \delta},$$

und man findet, daß a von dem Abstand x der Stelle vom Zahnkopf und der Zahnhöhe h nach der Gleichung $a = \frac{h}{x} + 3{,}5$ abhängt, während b, das für den Zahnfuß nach der für den Koeffizienten C_k gefundenen Gleichung den Wert 3,3 hatte, für sämtliche Meßstellen im Mittel dem Wert 3 entspricht.

Zur Vereinfachung der Gleichung werde noch gesetzt

$$a = \frac{h}{x} + 3,$$

so daß mit $b = 3$ als Gleichung für den Koeffizienten des idealen Zahnflusses angenommen werden kann

3) . . . $$C_i = 1 + \frac{m}{z} \cdot \frac{\delta \cdot x}{h + 3x(\delta + 1)}.$$

Die nach dieser Formel für die Meßstellen 2, 3, 4 und den Fuß berechneten Werte des Koeffizienten C_i sind in Z.T. IV eingetragen.

Der Seitenfluß N_σ ließe sich nach Gleichungen von Forbes [1]) berechnen, wenn seine radiale Ausdehnung auf dem Pol sowie der Mittelwert seiner Breite, die sich von Zahnbreite bis zu dem Wert der Nutteilung ausdehnt, bekannt ist.

Es wurde aber vorgezogen, den oben verwendeten Koeffizienten der Differenz von Seiten- und Nutfluß C_s durch eine Annäherungsformel zu berechnen. Die nach dem obigen Verfahren bestimmten, schwach gekrümmten Kurven $C_s = f(\delta)$ wurden in Annäherung als Gerade betrachtet und weiter ange-

[1]) Forbes, La lumière électrique, V. 24.

nommen, daß der Fluß N_s des ganzen Zahnes proportional mit der Zahnhöhe sich ändere, was bei den geringen in der Praxis vorkommenden Unterschieden in der Zahnhöhe genügend genau ist.

Schließlich wurde angenommen, daß C_s unabhängig von der Zahnbreite z ist. Der durch diese Annahme gemachte Fehler kann nicht groß sein, da zwar in der Differenz $N_s = N_\sigma - N_n$ der Seitenfluß N_σ wegen der erwähnten Verbreiterung langsamer als die Zahnbreite z wächst, der Nutfluß N_n aber mit wachsendem z abnimmt, so daß das Verhältnis $\frac{N_\sigma - N_n}{N_{zk}}$ von der Zahnbreite nur wenig beeinflußt werden kann.

Es wird also gesetzt $C_s = a \,.\, \partial \,.\, h$, wobei a eine Funktion der relativen Lage $\frac{x}{h}$ der Stelle auf dem Zahn ist mit der Grenzbedingung für $\frac{x}{h} = 0$: $a = 0$.

Die Berechnung der aus den Kurven für a sich ergebenden Werte liefert

$$a = \frac{\frac{x}{h}}{550 + 1250\,\frac{x}{h}}, \text{ demnach}$$

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad C_s = \partial \,.\, h \,.\, \frac{x}{550 \,.\, h + 1250\, x} \,.$$

Die nach dieser Formel berechneten Werte von C_s sind ebenfalls in Z.T. IV neben die aus der Messung bestimmten gesetzt.

Der Koeffizient des tatsächlichen Zahnflusses läßt sich also für die Fußinduktion 18 500 in seinem Verlauf längs des Zahnes für beliebige Größen von Zahnbreite, Nutbreite und Luftspalt berechnen mittels der Gleichungen 3 und 4, nämlich

$$C_z = \frac{N_z}{N_{zk}} = C_i + C_s =$$

$$= 1 + \partial \,.\, x \left\{ \frac{m}{z} \cdot \frac{1}{h + 3\,x\,(\partial + 1)} + \frac{h}{550\,h + 1250\,x} \right\} .$$

Die Betrachtung der Z.T. III zeigt gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung für die Koeffizienten C_{z3}, C_{z4}

und C_{zf}, während das berechnete C_{z2} durchweg höher ist als das gemessene. Der Grund für diese Abweichung ist in dem Nutfluß N_n zu suchen, der tatsächlich für jede Stelle des Zahnes der gleiche ist, während er bei der Berechnung in dem Koeffizienten C_s proportional dem Abstand vom Zahnkopf gesetzt wurde. Da dieser Fehler in dem schwächer gesättigten Teil des Zahnes und nur auf eine kurze Strecke auftritt, ist er nicht von merklichem Einfluß.

Weiter zeigt der Vergleich der Formel- und Meßwerte der Z.T. III, daß die berechneten Zahnkoeffizienten auch für die Zahnfußinduktionen 10 500 und 21 500 angenähert stimmen, mit Ausnahme derjenigen für den ungewöhnlich großen Luftspalt 11,8 mm. Da schon ein Luftspalt von 6,8 mm über der bei Dynamomaschinen jetzt gebräuchlichen Grenze liegt, können die Gleichungen 3 und 4 für Zahnfußinduktionen unter 21 000 als genügend betrachtet werden.

Merkliche Unterschiede treten dagegen, was zu erwarten war, bei hoher Sättigung auf, wie die Messungen mit der Fußinduktion 23 500, die nur bei Anwendung von 3 Zähnen erreicht werden konnte, zeigen; aus den früher erörterten Gründen nimmt hier die Fußinduktion nicht in gleichem Maße wie die Kopfinduktion zu. Zur Berücksichtigung dieser Erscheinung wurde angenommen, daß sie nicht durch eine Veränderung des idealen Zahnflusses, sondern nur durch eine solche in dem Fluß N_s verursacht sei. Aus den Z.T. III und IV ist dann zu entnehmen, daß der für beliebige Fußinduktion gültige und mit C'_s bezeichnete Koeffizient mit steigender Sättigung und Nutbreite und mit fallendem Luftspalt abnimmt, bei kleinem Luftspalt sogar negativ wird. Er soll für Sättigungen über 18 500 aus dem für diese berechneten Koeffizienten C_s durch Multiplikation mit einem Korrektionsfaktor berechnet werden.

Es wurde gesetzt

$$C'_s = C_s\,(1 - a \,.\, b),$$

wo a eine Funktion des Luftspaltes und der Nutbreite und b eine Funktion der Induktion ist, die für den Wert 18 500 zu Null wird. Dieselbe ist mit demjenigen Wert der Fußinduktion zu berechnen, welche bei einem den Gleichungen 3 und 4 entsprechenden Verlauf erreicht werden würde; diese fiktive Fußinduktion sei mit B'_{zf} bezeichnet. Es läßt sich dann setzen

$$b = \frac{10^3}{18500} - \frac{10^3}{B'_{zf}} = 0{,}055 - \frac{10^3}{B'_{zf}},$$

ferner berechnet sich angenähert

$$a = 5 + \frac{10\,m}{\delta},$$

so daß der korrigierte Koeffizient wird

$$5) \quad . \quad . \quad C'_s = C_s \left\{ 1 - \left(5 + \frac{10\,m}{\delta} \right) \left(0{,}055 - \frac{10^3}{B'_{zf}} \right) \right\}.$$

Einige mit dieser Korrektion berechnete Werte des Koeffizienten für den Zahnfuß C'_{zf} wurden in Z.T. III eingeschrieben.

Die aufgestellten Formeln ermöglichen also eine der Wirklichkeit nahekommende Berechnung des Kraftlinienverlaufes im Luftspalt und in den Zähnen bei konstanter Zahnbreite. Dagegen ist durch dieselben der Fluß in Zähnen mit abnehmender Breite noch nicht bestimmt, der, wie die Kurven II, 21—23 zeigen, bei hoher Induktion ein Maximum ungefähr in der Mitte des Zahnes hat. Ein Vergleich der Messungen 21—23 mit den nach den Formeln unter Einsetzung der Zahnkopfbreite berechneten Koeffizienten zeigt, daß der Verlauf vom Kopf bis etwa zur Hälfte des Zahnes den Formeln entspricht, dann aber infolge der früher besprochenen Veränderungen je nach der Induktion mehr oder weniger von denselben abweicht.

Eine Berechnung dieser Veränderungen wurde nicht mehr versucht, sie müßte sich auf Messungen mit verschiedenem Zahnbreitenverhältnis stützen. In der Praxis werden die Abweichungen bedeutend kleiner als die durch die Messungen gezeigten sein, bei denen absichtlich extreme Abmessungen gewählt wurden. Bei kleinen Dynamomaschinen, also solchen mit stark abnehmender Zahnbreite, wird ja bei hoher Sättigung der Luftspalt klein und die Nutbreite etwa von der Größe der Zahnkopfbreite genommen, bei großen Maschinen mit größerem Luftspalt ist dagegen der Unterschied in der Zahnbreite gering. Die mit den angegebenen Gleichungen und der Korrektion bestimmte Zahnfußinduktion wird daher um einen nicht sehr großen Betrag zu hoch berechnet werden.

IV. Nutfluß.

Schließlich wurden noch einige Messungen zur Orientierung über den Nutfluß gemacht, und zwar wurde die Induktion längs der Nutmittellinie mittels der beweglichen Prüfspule gemessen, deren Einstellung dabei ohne große Genauigkeit vorgenommen wurde.

Die Kurven III. 1—6 enthalten diese Messungen, und zwar ist die Induktion und der reziproke Wert derselben abhängig von der Lage in der Mittellinie aufgetragen. Letztere Kurve zeigt, bei Berücksichtigung der Verschiedenheit der Maßstäbe, deutlicher als die Induktionskurve, wie die Breite des Nutflusses in der Nähe des Zahnkopfes und im Luftspalt durch die Zahnflüsse, ferner bei hoher Sättigung am Zahnfuß durch den Fluß zwischen Nutgrund und Zahnflanken verändert wird, und ermöglicht in einzelnen Fällen die Berechnung der mittleren Breite desselben. In den Messungen 21—23 überschreitet der Zahnfluß bei hoher Sättigung ein Maximum, an dessen Stelle treten also keine Kraftlinien durch die Zahnflanken, so daß der Nutfluß dort die ganze Nutbreite einnimmt. Die größte Ordinate der $\frac{1}{B_n}$-Kurve der Messungen 21—23 ist also gleich der Nutbreite, der Mittelwert der Ordinaten gleich der mittleren Breite des Nutflusses, und zwar beträgt diese für die Kurven III, 5 u. 6 etwa die Hälfte der Nutbreite. Nimmt dagegen der Zahnfluß längs der ganzen Höhe zu, so füllt der Nutfluß an keiner Stelle die Nut ganz aus. Seine absolute Breite ist dann aus den Kurven nicht zu entnehmen. Dagegen zeigen die Kurven III, 1—4 die Einschnürung des Nutflusses in der Nähe des Zahnfußes infolge des durch hohe Sättigung verursachten Ausbiegens von Kraftlinien nach dem Nutgrund.

Der durch Planimetrierung der Induktionskurve erhaltene Mittelwert der Induktion in der Nutmittellinie muß sich auch aus der Berechnung der Erregeramperewindungen für Luftspalt und Zahn ergeben. Die Nachrechnung der Messung 12 (14) liefert: Bei einer Zahnfußinduktion von etwa 18 500 wurde gemessen eine maximale Luftinduktion von 6800 C.G.S., die für den Luftspalt erforderlichen Amperewindungen betragen also 3700. Der Zahnfußinduktion entsprechen etwa 160 Ampere-

windungen für 1 cm, nach der Berechnung mit konstantem Zahnfluß würden die Zahnamperewindungen demnach 880 sein, während sich dieselben für den gemessenen Kraftlinienverlauf zu 440 berechnen. Die Amperewindungen für Luftspalt und Zahn betragen also 4140. Die durch die gleiche Erregung hervorgerufene mittlere Nutinduktion ergibt sich hieraus zu 840 C.G.S., während die ohne große Genauigkeit bestimmte Kurve (III, 4) den Wert 800 liefert.

Im Gegensatz zu der üblichen Berechnungsart ist die Kenntnis des Nutflusses, dessen richtige Berechnung, wie gezeigt, wegen seiner veränderlichen Breite nicht ohne weiteres möglich ist, bei dem in vorliegender Arbeit gewähltem Weg nicht erforderlich, da jener bei Aufstellung der Formeln in den Fluß N_s eingeschlossen wurde.

In vorstehendem wurden auf Grund von Messungen unter Berücksichtigung des Einflusses des Luftspaltes, der Zahnbreite Zahnhöhe, Nutbreite und der Sättigung, dagegen ohne Rücksicht auf den Einfluß des Ankerfeldes und der Erwärmung Formeln für den Kraftlinienverlauf im Luftspalt und in Zähnen mit konstanter Breite aufgestellt und damit die Grundlage zu einer genaueren Berechnung der Zahnamperewindungen und der Zahnverluste gegeben. Zu ersterer kann die Bestimmung der für die einzelnen Stellen längs des Zahnes erforderlichen Amperewindungen aus der Magnetisierungskurve so lange nicht entbehrt werden, als noch keine brauchbare Gleichung für letztere gefunden ist.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Ossanna, der mich auf das Gebiet der vorliegenden Arbeit hingewiesen, und Herrn Prof. Déguisne, der mir die Ausführung derselben im Elektrotechnischen Institut des Physikalischen Vereins ermöglicht hat, möchte ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausdrücken.

Frankfurt a. M., Sommer 1910.

Zahlentafel I.
Meßwerte.

Nr.	Luftspalt				Nut	Zahn							
	δ	$\bar{B}_l$	B_{lm}	N_t	B_{ng}	N_{zk}	N_{z1}	N_{z2}	N_{z3}	N_{z4}	N_{z5}	N_{zf}	N_{zm}
	mm	1000 C.G.S.											
	A. z = 10 mm. I. h = 55 mm.												
	a) m = 5 mm.												
1	1,8	16,5	14,0	210		191,5	196	210	213	215	219	220	214
		13,7	11,8	177		162	166	176	180	183	185	185,5	181
		7.75	6,56	98,5		91	93,2	99,7	102	103	104	104,2	102,3
2	4,3	11,7	11,04	165		148	154	167	173	179	185	187	177,5
		6,55	6,15	92,2		84	89,3	96,4	99,7	103	104	104,2	101,5
3	6,8	10,5	10,2	153		139	145	159,5	167	176	185	187	174
		6,45	6,30	94,5		84	88,5	96,4	100	104	107	107,5	103
4	11,8	8,05	8,00	120		107	114	125,5	133	142	151	153	140
		5,8	5,8	87		78	82,3	91,1	95,0	100	105	105	99
	b) m = 10 mm.												
5	1,8	14,75	10,4	208	0,56	176	180,5	200,5	211,5	215	218	219	212
		12,4	8,73	175	0,12	146	151,5	169	179	182	184	185	179
		7,05	5,0	100		83,5	86	95,5	101,5	103,5	105	105,2	102
6	6.8	8,6	7,9	158	0,16	123	132	154	167	177	184	186	172
		5,10	4,67	93,4		74	77,5	90	97,5	101	105	106	99,5
	c) m = 15 mm.												
7	1,8	15,6	9,58	239,5	0,93	185	190,5	213,5	228	233	234,5	235	228,5
		13,75	8,42	210,5	0,42	164	171	192	207,5	214	217,5	218	208,5
8	6.8	8,9	7,45	186	0,48	133	141	169,5	193	208,5	217,5	219	201
		7,45	6,25	156	0,12	112	118,5	143	163	176,5	185,5	187	170,5
		4,42	3,73	93		65	70.5	84,5	95,5	101,5	105,5	106	100
9	11,8	7,2	6,88	172		122	130	159	183	203	216	219	195
		5,95	5,65	141		102	110	133,5	155	171	183	185	165

α) Polbreite 80 mm.

d) m = 20 mm.

10	1,8	15,2	8,28	248	1,05	178	184	209	226	232,5	235	235,5	227,5
		13,3	7,13	214	0,40	156	166	188	205	213,5	217	218	207,5
		11,05	5,97	179	0,11	129	137,5	157	172	181	184	185	175
		6,0	3,24	97		72	76,5	87,5	96,5	101,5	104	104,5	99
11	4,3	11,3	7,62	229	0,93	155	163	194,5	219,5	230	234	235	223,5
		8,5	5,72	172	0,20	115	123	148	169	183	187,5	188,5	175
		4,65	3,19	96		63,5	68,5	85	93	101	104	104,5	96,5
12	6,8	9,25	7,25	217	0,95	143	152	185	211,5	228	234,5	236	219,5
		8,25	6,44	193	0,45	129	136,5	166,5	192	210	217,5	219	201
		6,9	5,33	160	0,12	104	112	138	159	173,5	183	184,5	167,5
		3,8	3,02	91		60	65	79	91,5	100,5	105	106	96,5
13	11,8	—	7,0	210		130	142	175,5	204	225	234	236	215
		6,74	6,14	184	0,60	117	127,5	158	187	207	218	220	199
		5,45	4,97	149	0,25	95	104,5	130	153,5	172,5	183	184	164

β) Polbreite 120 mm.

14	6,8	8,05	6,27	188		124	133	163	189	207	217	219	199
		6,75	5,2	156		103	110	135	157	174,5	183	185	166
15	11,8	6,55	5,95	178		115	124	154,5	182,5	205	218	219,5	197
		5,25	4,81	144		93,5	101,5	127	150,5	170,5	182	184	162
		3,25	2,95	88		57	62	77	90	100	106	106,5	96

Mittelwerte aus den Messungen mit Polbreite 80 und 120 mm.

	6,8	8,15	6,35	190,5		126,5	135	165	190,5	208,5	217	219	200
		6,8	5,26	158		103,5	111	136,5	158	174	183	185	167
	11,8	6,65	6,05	181	0,58	116	126	156	185	206	218	220	198
		5,35	4,89	146,5	0,25	94	103	128,5	152	171,5	182,5	184	163

e) m = 1,8 mm.

16	1,8	18,4	—	—	—	207	208	209	212	217	217	217
		9,1			—	101,2	101,5	102,5	104	104,5	104,5	104,5
17	4,3	13,5	—	—	—	153	154	159	166	178	185	186
		8,5	—	—	—	96	96,5	98	100	102,5	104,5	105
18	6,8	11,8	—	—	—	135,5	137	142,5	151,5	166	178	179,5
		8,0	—	—	—	91	91,5	94	97	101	104,5	105,5

Nr.	Luftspalt				Nut	Zahn							
	δ	$\overline{B}_l$	B_{lm}	N_t	B_{ng}	N_{zk}	N_{z1}	N_{z2}	N_{z3}	N_{z4}	N_{z5}	N_{zf}	N_{zm}
	mm	1000 C.G.S.											
					II. $h = 32$ mm. $m = 15$ mm.								
19	6,8	gleiche Werte wie bei $h = 55$ mm.			0,39	133	141	169	190,5	204,5	—	206	193
					—	113	119	142,5	162	173,5	—	176	161
						66	51	85	95	102	—	103,5	97
					B. $z = 5,8$ mm. $h = 55$ mm. $m = 10$ mm.								
20	6,8	7,70	7,20	113,5	0,5	77	85	107	116	122	126,5	127	119,5
		6,30	5,80	91,5	0,15	64	71	90	98	104,5	109	109,5	102
		3,85	3,60	57,0		38	42,5	54	58,5	61,5	63	64	60,5
					C. $z_k = 10$ mm. $z_f = 4,3$ mm. $h = 55$ mm.								
	a) $m = 12,5$ mm.												
21	6,8	4,5	3,95	89	0,3	65	70,5	84,5	92,5	97	98	96,5	95
		3,65	3,20	72	—	53,5	56,5	67,5	73,5	78	79	79	78
		2,1	1,85	41,7	—	31	33	39,5	43	45	46	46	45,5
	b) $m = 22,5$ mm.												
22	1,8	6,70	3,40	110,5	0,25	78	82,5	94,5	102	106	104,5	100,5	96,5
		5,75	2,90	94,2	0,10	68	71	81,5	88,5	93	92,5	91	89,5
		4,15	2,08	67,5	—	47	51	58	63	67	68	68	68,5
23	6,8	—	—	—	—	76	82	102	117	125,5	—	111,5	106
		4,30	3,24	105	0,4	65	71	89	101,5	111	110	104,5	101
		3,05	2,28	74	0,1	47	51	64	72,5	80	82	82	82
		1,8	1,38	44,8	—	28,5	31	38	44	48	50	50,5	51

Zahlentafel II.
Luftspalt-Koeffizienten.

Nr.	δ	nach Messung		nach Formel	nach Messung		nach Formel	nach Messung	nach Messung	nach Formel
		Einzelwert	Mittelwert	von Ossanna	Einzelwert	Mittelwert		τ		
	mm	C_l			C_k			mm	c_k	
	A. z = 10 mm. I. h = 55 mm.									
	a) m = 5 mm.									
1	1,8	1,18 1,16 1,18	1,17	1,21	0,915 0,915 0,925	0,92	0,92	12,5	0,50	0,52
2	4,3	1,06 1,07	1,06	1,11	0,90 0,91	0,91	0,90	13,0	0,60	0,68
3	6,8	1,03 1,02	1,02	1,08	0,91 0,89	0,90	0,89	13,3	0,66	0,76
4	11,8	1,005 1,00	1,00	1,05	0,89 0,895	0,89	0,88	13,5	0,72	0,81
	b) m = 10 mm.									
5	1,8	1,42 1,42 1,40	1,41	1,41	0,85 0,835 0,83	0,84	0,85	13,0	0,30	0,33
6	6,8	1,09 1,09	1,09	1,15	0,78 0,795	0,79	0,80	15,5	0,55	0,54
	c) m = 15 mm.									
7	1,8	1,63 1,63	1,63	1,61	0,77 0,78	0,78	0,79	13,5	0,23	0,24

Nr.	δ mm	nach Messung C_I Einzelwert	nach Messung C_I Mittelwert	nach Formel von Ossanna C_I	nach Messung C_k Einzelwert	nach Messung C_k Mittelwert	nach Formel C_k	nach Messung τ mm	nach Messung c_k	nach Formel c_k
					A. z = 10 mm. I. h = 55 mm.					
8	6,8	1,20 1,20 1,19	1,20	1,23	0,72 0,72 0,70	0,72	0,73	16,5	0,43	0,43
9	11,8	1,05 1,05	1,05	1,15	0,71 0,72	0,71	0,71	17,5	0,50	0,48
		d) m = 20 mm.			α) Polbreite 80 mm.					
10	1,8	1,83 1,86 1,85 1,86	1,85	1,82	0,72 0,73 0,72 0,74	0,73	0,75	13,5	0,17	0,18
11	4,3	1,47 1,48 1,46	1,47	1,45	0,68 0,67 0,66	0,67	0,68	16	0,30	0,30
12	6,8	1,28			0,66					
		siehe folgendes								
13	11,8	1,26 siehe folgendes			0,66					
					β) Polbreite 120 mm.					
14	6,8	siehe folgendes								

15	11,8	siehe folgendes 1,10			0,65					

Mittelwerte aus Messung mit Polbreite 80 und 120 mm.

	6,8	1,28 1,29	1,28	1,31	0,66 0,66	0,66	0,67	17	0,35	0,35
	11,8	1,10 1,09	1,10	1,19	0,64 0,64	0,64	0,65	18	0,40	0,40

II. h = 32 mm. m = 15 mm.

19	6,8	gleiche Werte wie bei h = 55 mm.								

B. z = 5,8 mm. h = 55 mm. m = 10 mm.

20	6,8	1,07 1,08 1,07	1,07	1,09	0,68 0,70 0,68	0,69	0,70	11,2	0,52	0,54

C. z_k = 10 mm. z_f = 4,3 mm. h = 55 mm.

a) m = 12,5 mm.

21	6,8	1,14 1,13 1,14	1,14	1,19	0,73 0,74 0,74	0,74	0,76			

b) m = 22,5 mm.

22	1,8	1,97 1,98 1,99	1,98	1,93	0,71 0,72 0,70	0,71	0,72			
23	6,8	1,33 1,33 1,32	1,33	1,35	0,62 0,63 0,63	0,63	0,64			

Zahlentafel III.
Zahn-Koeffizienten C_z.

Nr.	δ	Zahnfuß-Induktion	Koeffizienten nach Messung					Koeffizienten nach Formel			
		B_{zf}	C_{z1}	C_{z2}	C_{z3}	C_{z4}	C_{zf}	C_{z2}	C_{z3}	C_{z4}	C_{zf}
	mm	1000 C.G.S.									
			A. z = 10 mm. I. h = 55 mm.								
		a) m = 5 mm.									
1	1,8	22,0	1,02	1,09	1,11	1,12	1,15				
		18,5	1,03	1,09	1,11	1,13	1,15	1,06	1,10	1,12	1,16
		10,4	1,02	1,10	1,12	1,13	1,14				
2	4,3	18,7	1,04	1,13	1,17	1,21	1,26	1,11	1,16	1,22	1,26
		10,4	1,03	1,15	1,19	1,23	1,24				
3	6,8	18,6	1,04	1,14	1,20	1,27	1,35	1,15	1,21	1,28	1,35
		10,7	1,05	1,15	1,19	1,24	1,28				
4	11,8	15,3	1,06	1,17	1,24	1,33	1,43				
		10,5	1,06	1,17	1,22	1,28	1,35				
extrapoliert		18,5		1,18	1,26	1,37	1,50	1,21	1,30	1,41	1,51
		b) m = 10 mm.									
5	1,8	21,9	1,03	1,14	1,20	1,22	1,24				1,22
		18,5	1,03	1,16	1,22	1,24	1,27	1,10	1,17	1,21	1,25
		10,5	1,03	1,14	1,22	1,24	1,26				
6	6,8	18,6	1,07	1,25	1,36	1,44	1,51	1,24	1,33	1,41	1,49
		10,6	1,05	1,22	1,32	1,37	1,44				
		c) m = 15 mm.									
7	1,8	23,5	1,03	1,16	1,23	1,26	1,27				1,26
		21,8	1,04	1,17	1,26	1,30	1,33				1,28

8	6,8	21,9	1,06	1,28	1,45	1,57	1,64				
		18,7	1,06	1,28	1,46	1,57	1,67	1,33	1,45	1,55	1,65
		10,6	1,08	1,30	1,47	1,56	1,63				
9	11,8	21,9	1,06	1,30	1,50	1,66	1,79				
		18,5	1,08	1,31	1,52	1,68	1,81	1,45	1,56	1,70	1,81

d) m = 20 mm.

10	1,8	23,5	1,04	1,17	1,27	1,31	1,32				1,34
		21,8	1,06	1,21	1,31	1,37	1,40				1,37
		18,5	1,07	1,22	1,33	1,40	1,43	1,20	1,30	1,38	1,44
		10,4	1,06	1,22	1,34	1,41	1,45				
11	4,3	23,5	1,05	1,25	1,42	1,48	1,52				1,54
		18,8	1,07	1,28	1,47	1,59	1,64	1,35	1,47	1,58	1,64
		10,4	1,08	1,34	1,47	1,60	1,66				
12	6,8	23,6	1,06	1,29	1,48	1,59	1,66				
14		21,9	1,07	1,31	1,51	1,65	1,73				1,70
		18,5	1,07	1,32	1,53	1,68	1,78	1,43	1,57	1,68	1,77
		9,6	1,08	1,32	1,52	1,67	1,77				
13	11,8	23,6	1,09	1,35	1,56	1,73	1,82				1,84
15		22,0	1,09	1,34	1,59	1,78	1,89				1,88
		18,4	1,10	1,37	1,62	1,82	1,96	1,57	1,70	1,85	1,96
		10,6	1,09	1,35	1,58	1,76	1,87				

e) m = 1,8 mm.

16	1,8	21,7	1,005	1,01	1,025	1,05	1,05				
		10,5	1,003	1,013	1,025	1,03	1,03				
17	4,3	18,6	1,006	1,04	1,08	1,16	1,21				
		10,5	1,005	1,02	1,04	1,07	1,09				
18	6,8	18,0	1,01	1,05	1,12	1,22	1,32				
		10,5	1,005	1,03	1,065	1,11	1,16				

Nr.	δ	Zahnfuß-Induktion	nach Messung					nach Formel			
		B_{zf}	C_{z1}	C_{z2}	C_{z3}	C_{z4}	C_{zf}	C_{z2}	C_{z3}	C_{z4}	C_{zf}
	mm	1000 C.G.S.									
			II. h = 32 mm. m = 15 mm.								
19	6,8	20,6	1,04	1,25	1,41	—	1,52				
		17,6	1,05	1,26	1,43	—	1,56	1,30	1,47	—	1,59
		10,4	1,07	1,29	1,44	—	1,57				
			B. z = 5,8 mm. h = 55 mm. m = 10 mm.								
20	6,8	22,0	1,10	1,38	1,51	1,58	1,65				
		18,8	1,11	1,41	1,53	1,63	1,71	1,39	1,52	1,60	1,68
		11,0	1,10	1,40	1,52	1,60	1,68				

Nr.	δ	Zahnfuß-Induktion	nach Messung						nach Formel				
		B_{zf}	C_{z1}	C_{z2}	C_{z3}	C_{z4}	C_{z5}	C_{zf}	C_{z2}	C_{z3}	C_{z4}	C_{z5}	C_{zf}
	mm	1000 C.G.S.											
			C. z_k = 10 mm. z_f = 4,3 mm. h = 55 mm.										
	a) m = 12,5 mm.												
21	6,8	22,0	1,08	1,30	1,42	1,50	1,51	1,48					
		18,1	1,06	1,26	1,37	1,46	1,47	1,46	1,29	1,38	1,48	1,52	1,56
		10,5	1,06	1,27	1,39	1,45	1,48	1,47					
	b) m = 22,5 mm.												
22	1,8	22,5	1,06	1,21	1,31	1,36	1,34	1,24					
		20,8	1,04	1,20	1,30	1,37	1,36	1,31	1,22	1,33	1,42	1,46	1,49
		15,9	1,08	1,23	1,34	1,42	1,45	1,46					
23	6,8	24,7	1,08	1,34	1,54	1,65	—	1,39					
		23,5	1,09	1,37	1,56	1,71	1,69	1,55					
		19,5	1,08	1,36	1,54	1,70	1,74	1,74	1,48	1,63	1,75	1,80	1,84
		11,8	1,09	1,33	1,54	1,68	1,75	1,79					

Zahlentafel IV.

I. Ideale Zahn-Koeffizienten C_i.

m	ϑ	nach Messung				nach Formel			
mm	mm	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{if}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{if}
				z = 10 mm. h = 55 mm.					
5	1,8	1,07	1,09	1,08	1,09	1,05	1,07	1,08	1,10
	4,3	1,11	1,13	1,12	1,13	1,08	1,10	1,12	1,13
	6,8	1,12	1,14	1,14	1,14	1,10	1,12	1,13	1,14
	11,8	1,13	1,15	1,16	1,15	1,12	1,14	1,14	1,15
10	1,8	1,13	1,15	1,16	1,18	1,09	1,14	1,17	1,19
	6,8	1,21	1,27	1,28	1,28	1,19	1,24	1,26	1,28
15	1,8	1,17	1,23	1,24	1,27	1,14	1,20	1,25	1,28
	6,8	1,26	1,37	1,41	1,42	1,28	1,36	1,40	1,44
	11,8	1,27	1,40	1,46	1,47	1,36	1,40	1,43	1,45
20	1,8	1,20	1,30	1,34	1,37	1,19	1,27	1,34	1,38
	4,3	1,27	1,43	1,49	1,49	1,32	1,41	1,48	1,51
	6,8	1,30	1,46	1,55	1,55	1,38	1,48	1,53	1,56
	11,8	1,31	1,50	1,62	1,63	1,48	1,54	1,58	1,60

II. Koeffizienten des Seiten- und Nutflusses C_s

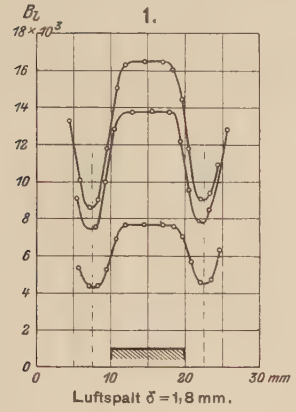
für $B_{zf} = 18500$.

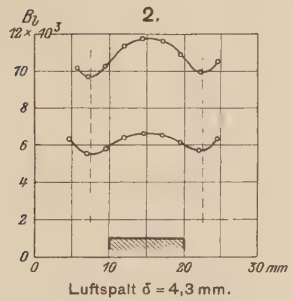
m	ϑ	nach Messung				nach Formel			
mm	mm	C_{s2}	C_{s3}	C_{s4}	C_{sf}	C_{s2}	C_{s3}	C_{s4}	C_{sf}
	1,8	—	0,03	0,06	0,08	0,01	0,03	0,04	0,06
5	4,3	—	0,05	0,11	0,16	0,03	0,06	0,10	0,13
bis	6,8	—	0,07	0,15	0,23	0,05	0,09	0,15	0,21
20	11,8	0,04	0,10	0,20	0,33	0,09	0,16	0,27	0,36

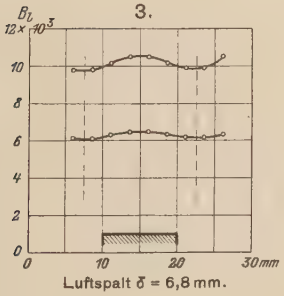
Hoerner, Kraftlinienverlauf.

A. Zahnbreite z = 10 mm. Nr. 1–13.

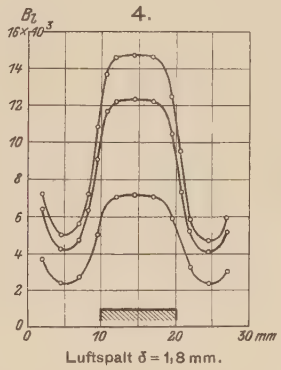
a). Nutbreite m = 5 mm.

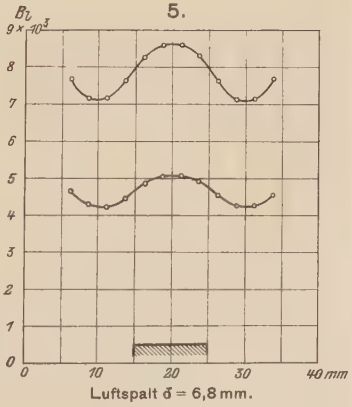




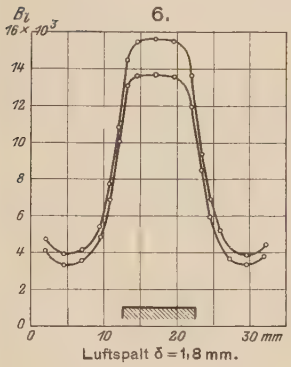


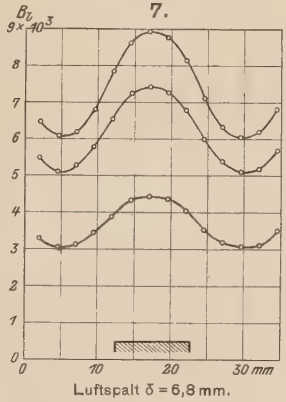
b). Nutbreite m = 10 mm.

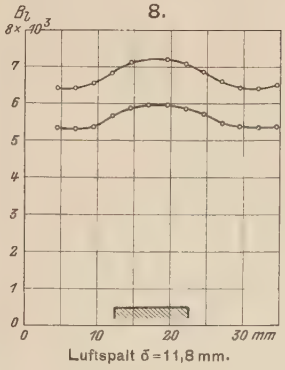




c). Nutbreite m = 15 mm.



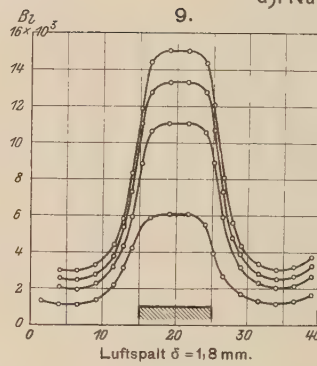


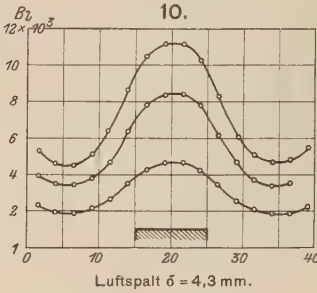


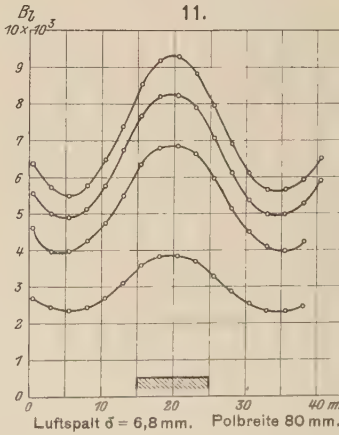
Luftspal

Zahnhöhe h = 55

d). Nu



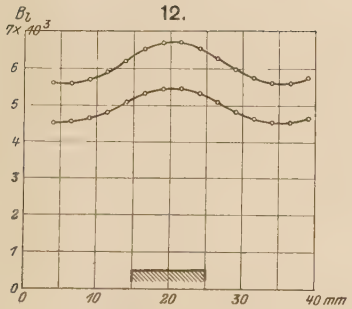




Verlag von Julius Springer in Berlin.

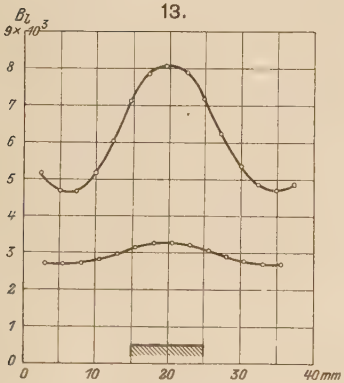
m = 20 mm.

12.



Luftspalt δ = 11,8 mm.
Polbreite 80 mm.

13.



obere Kurve:
Luftspalt δ = 6,8 mm.

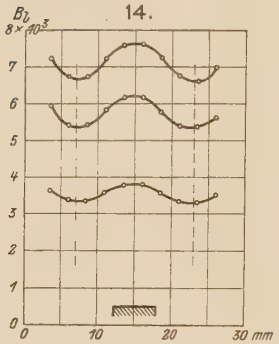
untere Kurve:
Luftspalt δ = 11,8 mm.

Polbreite 120 mm.

B. Zahnbreite $z = 5{,}8$ mm. Nr. 14.

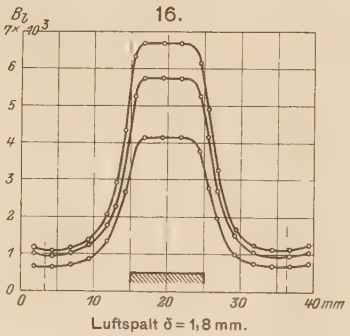
Nutbreite m = 10 mm.

14.



Luftspalt δ = 6,8 mm.

16.

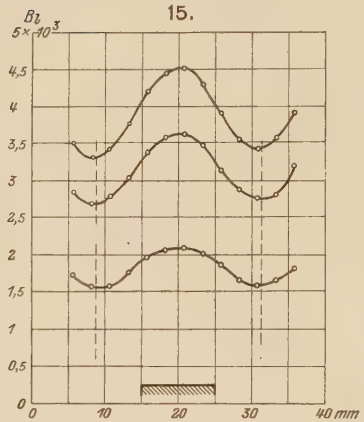


Luftspalt δ = 1,8 mm.

C. Zahnkopfbreite $z_k = 10$ mm. Zahnfußbreite $z_f = 4{,}3$ mm. Nr. 15–17.

a). Nutbreite m = 12,5 mm.

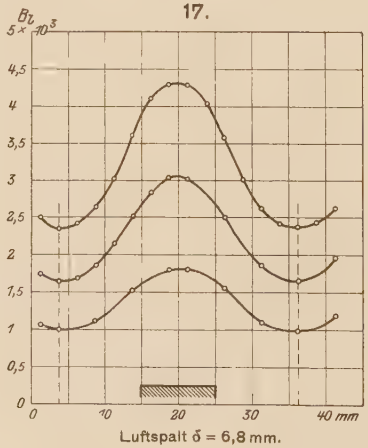
15.



Luftspalt δ = 6,8 mm.

b). Nutbreite m = 22,5 mm.

17.



Luftspalt δ = 6,8 mm.

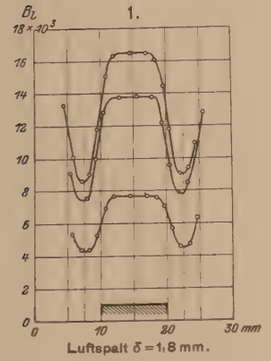
Techn.–art. Anstalt von Alfred Müller in Leipzig.

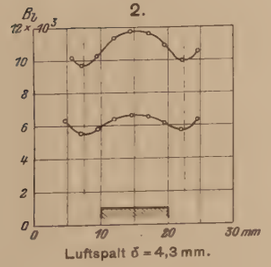
Hoerner, Kraftlinienverlauf.

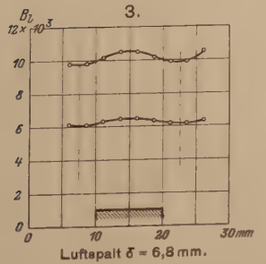
Luftspalt.

A. Zahnbreite z = 10 mm. Nr. 1-13.

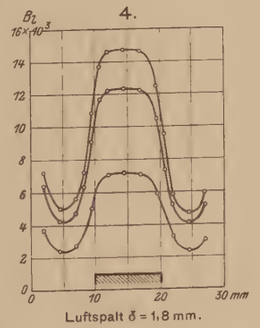
a). Nutbreite m = 5 mm.

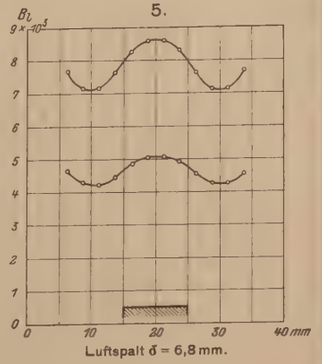




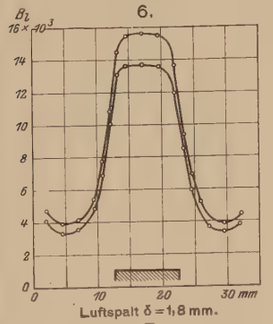


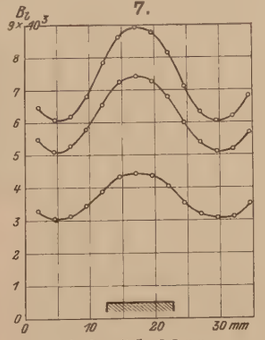
b). Nutbreite m = 10 mm.

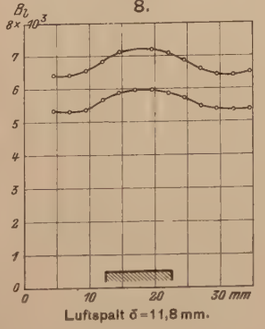




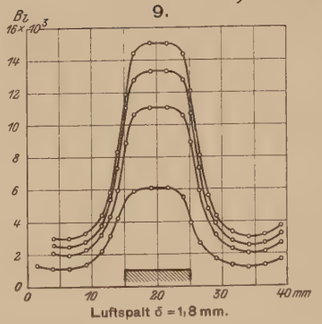
c). Nutbreite m = 15 mm.

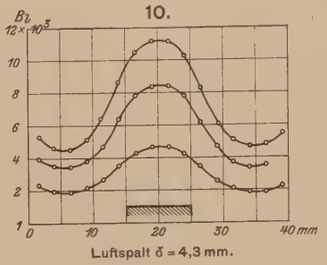


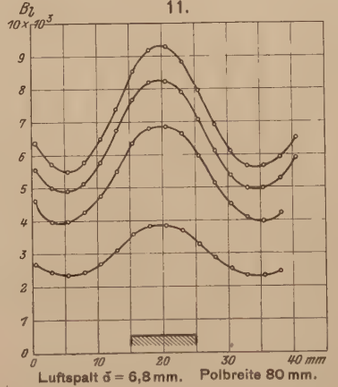


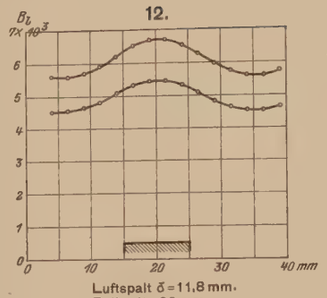


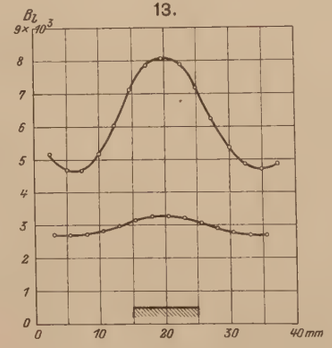
d). Nutbreite m = 20 mm.





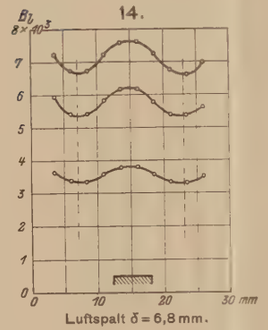


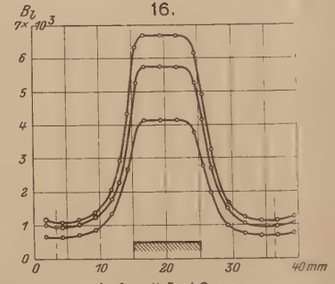




B. Zahnbreite z = 5,8 mm. Nr. 14.

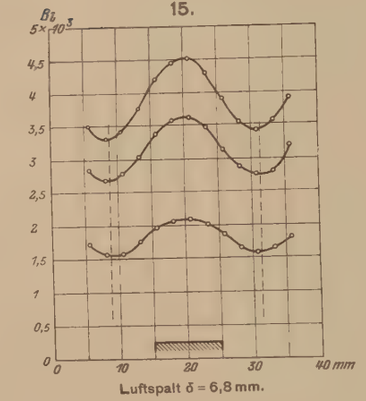
Nutbreite m = 10 mm.



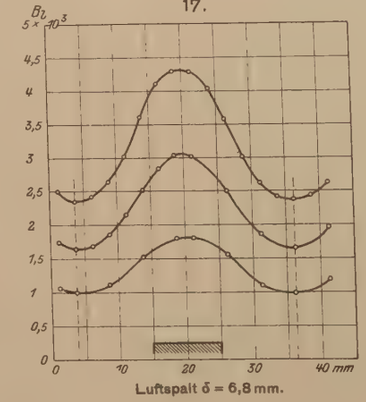


C. Zahnkopfbreite z_k = 10 mm. Zahnfußbreite z_f = 4,3 mm. Nr. 15-17.

a). Nutbreite m = 12,5 mm.



b). Nutbreite m = 22,5 mm.



Verlag von Julius Springer in Berlin.

Techn.-art. Anstalt von Alfred Müller in Leipzig.

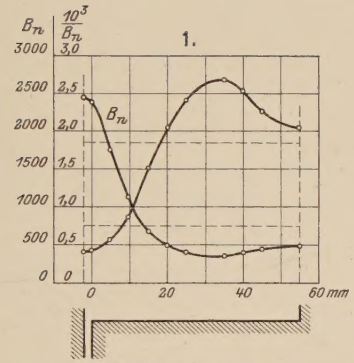
Nut.

Zahnhöhe h = 55 mm

A. Zahnbreite z = 10 mm

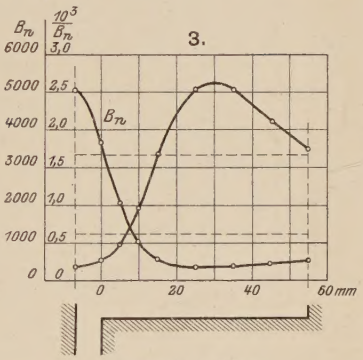
Nr. 1 – 4

Nutbreite m = 20 mm



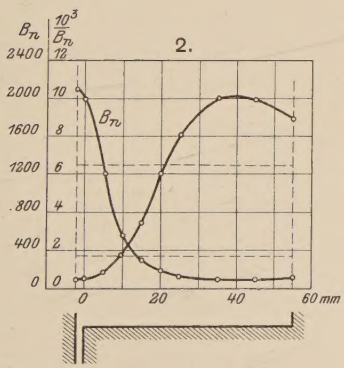
Luftspalt δ = 1,8 mm

Zahnfußinduktion $B_{z_f} = 21{,}9 \times 10^3$



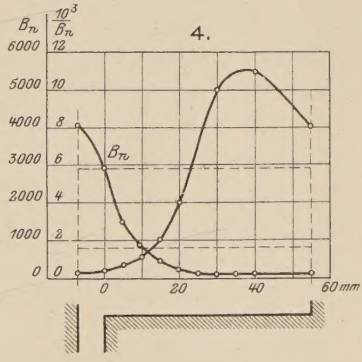
Luftspalt δ = 6,8 mm

Zahnfußinduktion $B_{z_f} = 21{,}9 \times 10^3$



Luftspalt δ = 1,8 mm

Zahnfußinduktion $B_{z_f} = 18{,}5 \times 10^3$



Luftspalt δ = 6,8 mm

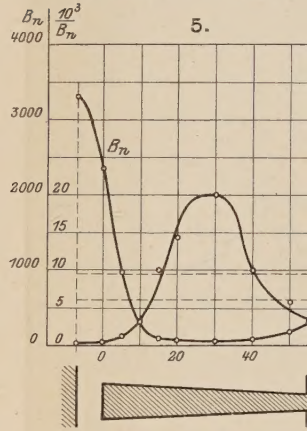
Zahnfußinduktion $B_{z_f} = 18{,}5 \times 10^3$

B. Zahnkopfbreite $z_k = 10$

Zahnfußbreite $z_f = 4{,}3$

Nr. 5 u. 6.

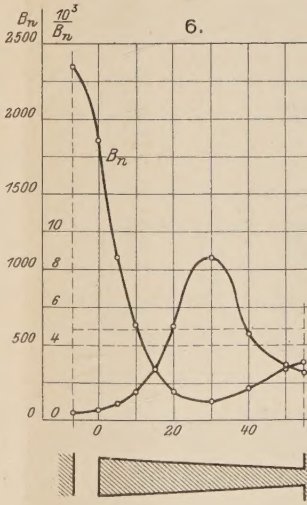
a). Nutbreite m = 12,5 mm



Luftspalt δ = 6,8 mm

Zahnfußinduktion $B_{z_f} = 22 \times 10$

b). Nutbreite m = 22,5 mm



Luftspalt δ = 6,8 mm

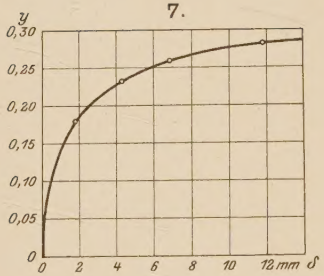
Zahnfußinduktion $B_{z_f} = 23{,}3 \times 1$

Verlag von Julius Springer in Berlin.

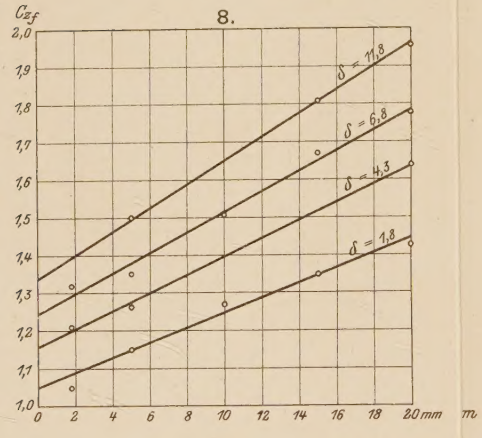
Auswertung.

Nr. 7–11.

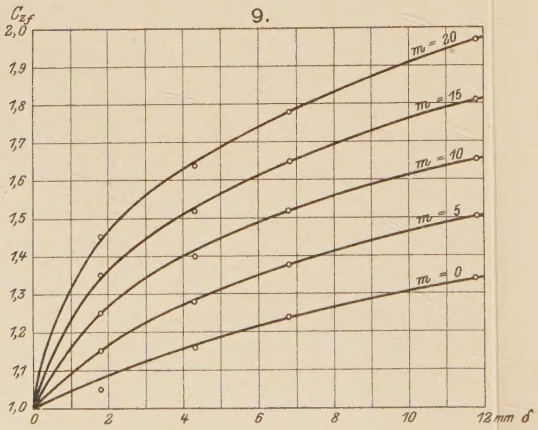
7.



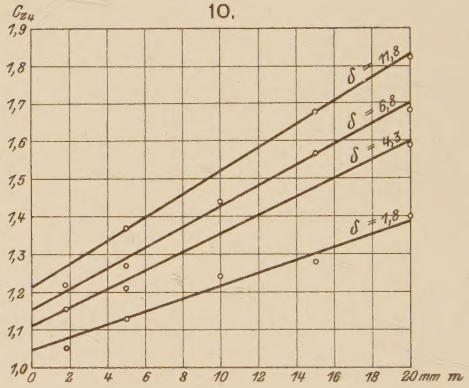
8.



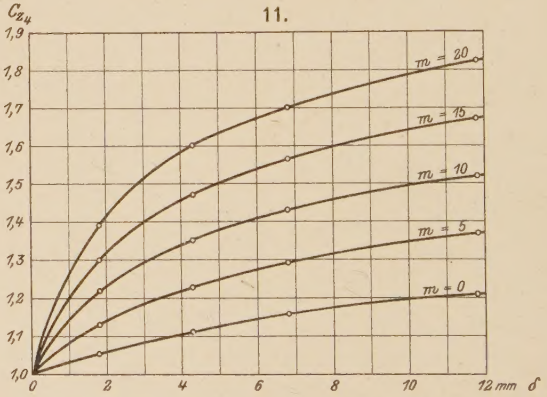
9.



10.



11.



Techn. - art. Anstalt von Alfred Müller in Leipzig.